

**Документ подготовлен к утверждению  
(изменения в КИМ 2013 года в сравнении с КИМ 2012 года  
отсутствуют)**

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Демонстрационный вариант  
контрольных измерительных материалов единого  
государственного экзамена 2013 года  
по математике**

подготовлен Федеральным государственным бюджетным  
научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

**Пояснения к демонстрационному варианту  
контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2013 года  
по МАТЕМАТИКЕ**

Демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2013 года разработан по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме, уровне сложности. Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2013 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов – в кодификаторах требований и элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2013 года.

Правильное решение каждого из заданий В1–В14 части 1 экзаменационной работы оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий С1 и С2 оценивается 2 баллами, С3 и С4 – 3 баллами, С5 и С6 – 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы – 32.

Верное выполнение не менее пяти заданий экзаменационной работы отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, даётся возможное решение. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

**Демонстрационный вариант  
контрольных измерительных материалов  
для проведения в 2013 году единого государственного экзамена  
по МАТЕМАТИКЕ**

**Инструкция по выполнению работы**

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

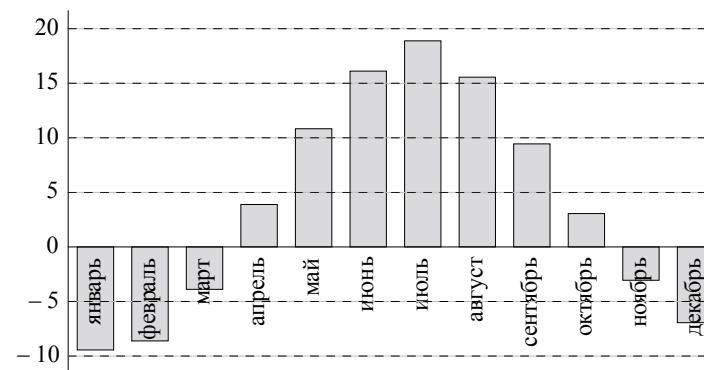
**Желаем успеха!**

**Часть 1**

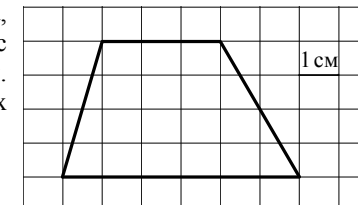
*Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

**B1** Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

**B2** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Ярославле по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда средняя температура в Ярославле была отрицательной.



**B3** Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



**B4** Строительная фирма планирует купить  $70 \text{ м}^3$  пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

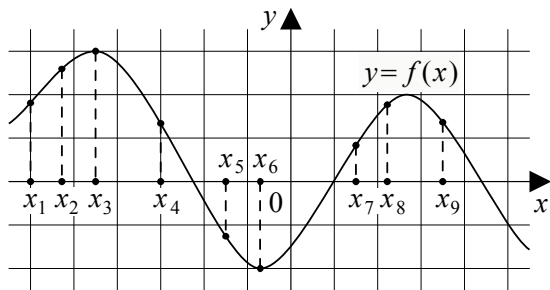
Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за $1 \text{ м}^3$ )	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия доставки
А	2 600	10 000	Нет
Б	2 800	8 000	При заказе товара на сумму свыше 150 000 рублей доставка бесплатная
В	2 700	8 000	При заказе товара на сумму свыше 200 000 рублей доставка бесплатная

**B5** Найдите корень уравнения  $\log_3(x - 3) = 2$ .

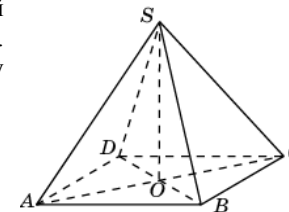
**B6** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ . Найдите угол  $BOC$ , если угол  $BAC$  равен  $32^\circ$ .

**B7** Найдите  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = 0,6$  и  $\pi < \alpha < 2\pi$ .

**B8** На рисунке изображён график дифференцируемой функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены девять точек:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ . Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции  $f(x)$  отрицательна. В ответе укажите количество найденных точек.



**B9** Диагональ  $AC$  основания правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна 6. Высота пирамиды  $SO$  равна 4. Найдите длину бокового ребра  $SB$ .



**B10** В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

**B11** Объём первого цилиндра равен  $12 \text{ м}^3$ . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра (в  $\text{м}^3$ ).

**B12** Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой  $h(t) = -5t^2 + 18t$ , где  $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

**B13** Весной катер идёт против течения реки в  $\frac{2}{3}$  раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на  $1 \text{ км/ч}$  медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в  $\frac{1}{2}$  раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в  $\text{км/ч}$ ).

**B14** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение  $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ .

C2

Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  равна 2, а диагональ боковой грани равна  $\sqrt{5}$ . Найдите угол между плоскостью  $A_1 BC$  и плоскостью основания призмы.

C3

Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

C4

На стороне  $BA$  угла  $ABC$ , равного  $30^\circ$ , взята такая точка  $D$ , что  $AD = 2$  и  $BD = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $D$  и касающейся прямой  $BC$ .

C5

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$  больше 1.

C6

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно  $-3$ , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно  $-8$ .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Система оценивания экзаменационной работы по математике****Ответы к заданиям части 1**

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задание	Ответ
B1	5
B2	5
B3	18
B4	192 000
B5	12
B6	64
B7	-0,8
B8	3
B9	5
B10	0,92
B11	9
B12	2,4
B13	5
B14	1

**Ответы к заданиям части 2**

Задание	Ответ
C1	а) $\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ . б) $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$
C2	$30^\circ$
C3	$(2; \log_2 11]$
C4	1 или 7
C5	$\left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$
C6	а) 44; б) отрицательных; в) 17

**Решения и критерии оценивания заданий части 2**

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий части 2 зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

**C1**

а) Решите уравнение  $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

**Решение.**

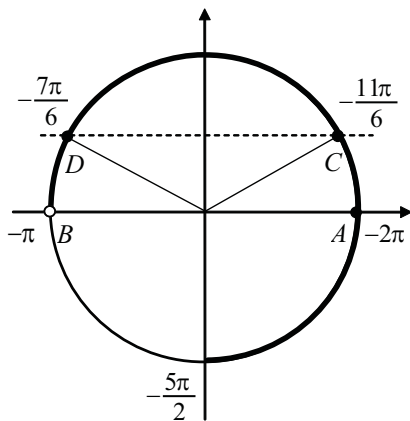
а) Так как  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ , то  $1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$ ,

$$2\sin^2 x - \sin x = 0, \quad \sin x \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Корни уравнения:  $x = \pi n$ ,  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) Корни уравнения  $\sin x = 0$  изображаются точками  $A$  и  $B$ , а корни уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$  — точками  $C$  и  $D$ , промежуток  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$  изображается жирной дугой (см. рис.). В указанном промежутке содержатся три корня уравнения:  $-2\pi$ ,  $-2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$  и

$$-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}.$$



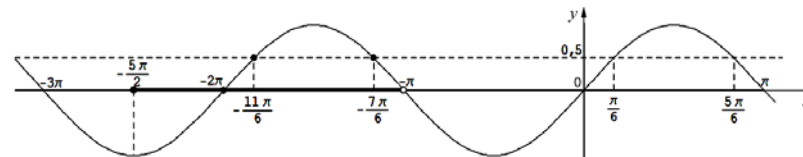
**Ответ:** а)  $\pi n$ ,  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$б) -2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}.$$

*Другие решения пункта б).*

б) Корни, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ , отберем по графику  $y = \sin x$ . Прямая  $y = 0$  (ось  $Ox$ ) пересекает график в единственной точке  $(-2\pi; 0)$ , абсцисса которой принадлежит промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

Прямая  $y = \frac{1}{2}$  пересекает график ровно в двух точках, абсциссы которых принадлежат  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$  (см. рис.). Так как период функции  $y = \sin x$  равен  $2\pi$ , то эти абсциссы равны, соответственно,  $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$  и  $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$ .



В промежутке  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$  содержатся три корня:  $-2\pi$ ,  $-\frac{11\pi}{6}$ ,  $-\frac{7\pi}{6}$ .

б) Пусть  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Подставляя  $n = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , получаем  $x = \dots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$ . Промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$  принадлежит только  $x = -2\pi$ .

Пусть  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Подставляя  $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , получаем:

$$x = \dots \left(-\frac{1}{6} - 3\right)\pi, \left(\frac{1}{6} - 2\right)\pi, \left(-\frac{1}{6} - 1\right)\pi, \frac{\pi}{6}, \left(-\frac{1}{6} + 1\right)\pi, \left(\frac{1}{6} + 2\right)\pi, \dots$$

Промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$  принадлежат только  $x = -\frac{11\pi}{6}$ ,  $x = -\frac{7\pi}{6}$ .

Промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$  принадлежат корни:  $-2\pi$ ,  $-\frac{11\pi}{6}$ ,  $-\frac{7\pi}{6}$ .

б) Отберем корни, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

Пусть  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $-\frac{5\pi}{2} \leq \pi n < -\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq n < -1 \Leftrightarrow n = -2$ .

Корень, принадлежащий промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ :  $x = -2\pi$ .

Пусть  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Тогда  $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n < -\pi \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < n \leq -\frac{7}{12} \Leftrightarrow n = -1$ .

Корень, принадлежащий промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ :  $x = -\frac{11\pi}{6}$ .

Пусть  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Тогда  $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < -\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq n < -\frac{11}{12} \Leftrightarrow n = -1$ .

Корень, принадлежащий промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ :  $x = -\frac{7\pi}{6}$ .

Промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$  принадлежат корни:  $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведен обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**C2** Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  равна 2, а диагональ боковой грани равна  $\sqrt{5}$ . Найдите угол между плоскостью  $A_1 BC$  и плоскостью основания призмы.

**Решение.**

Обозначим  $H$  середину ребра  $BC$  (см. рисунок). Так как треугольник  $ABC$  равносторонний, а треугольник  $A_1 BC$  – равнобедренный, отрезки  $AH$  и  $A_1 H$  перпендикулярны  $BC$ . Следовательно,  $\angle A_1 H A$  – линейный угол двугранного угла с гранями  $B C A$  и  $B C A_1$ .

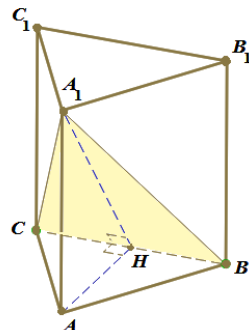
Из треугольника  $A_1 A B$  найдём:  $A A_1 = 1$ .

Из треугольника  $A H B$  найдём:  $A H = \sqrt{3}$ .

Из треугольника  $H A A_1$  найдём:

$$\operatorname{tg} \angle A_1 H A = \frac{A A_1}{A H} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Искомый угол равен  $30^\circ$ .



**Ответ:**  $30^\circ$ .

**Возможны другие формы записи ответа.** Например:

А)  $\frac{\pi}{6}$ ;

Б)  $\frac{\pi}{6}$  рад.

В)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$  и т.п.

**Возможны другие решения.** Например, с использованием векторов или метода координат.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**C3**

Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

**Решение.**

1. Неравенство  $4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22$  запишем в виде  $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x - 22 \leq 0$ .

Относительно  $t = 2^x$  неравенство имеет вид:  $t^2 - 9t - 22 \leq 0$ , откуда получаем:  $(t+2)(t-11) \leq 0, -2 \leq t \leq 11$ .

Значит,  $-2 \leq 2^x \leq 11, x \leq \log_2 11$ .

2. Второе неравенство системы определено при  $\begin{cases} (x+1)(x-2) > 0, \\ \frac{x+1}{x-2} > 0, \end{cases}$

то есть при  $x < -1$  и  $x > 2$ .

При допустимых значениях переменной получаем:

$$\log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}, \log_3((x+1)(x-2)) - \log_3 \frac{x+1}{x-2} \leq 1,$$

$$\log_3(x-2)^2 \leq 1, (x-2)^2 \leq 3, 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}.$$

С учётом области допустимых значений переменной получаем решение второго неравенства системы:  $2 < x \leq 2 + \sqrt{3}$ .

3. Сравним  $\log_2 11$  и  $2 + \sqrt{3}$ . Так как  $\sqrt{3} > \sqrt{2,25} = 1,5$ , то  $2 + \sqrt{3} > 3,5 = \log_2(8 \cdot \sqrt{2}) > \log_2(8 \cdot 1,4) = \log_2(11,2) > \log_2 11$ ,

следовательно,  $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$ .

Решение системы неравенств:  $(2; \log_2 11]$ .

**Ответ:**  $(2; \log_2 11]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но не проведено обоснованного сравнения значений конечных точек найденных промежутков	2
Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

**Комментарий.** Если обоснованно получены оба ответа:  $x \leq \log_2 11$  и  $2 < x \leq 2 + \sqrt{3}$ , после чего лишь **сказано**, но никак не обосновано, что  $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$ , то такое решение оценивается в 2 балла.

**C4** На стороне  $BA$  угла  $ABC$ , равного  $30^\circ$ , взята такая точка  $D$ , что  $AD = 2$  и  $BD = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $D$  и касающейся прямой  $BC$ .

**Решение.**

Центр  $O$  искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку  $AD$ . Обозначим  $P$  середину отрезка  $AD$ ,  $Q$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую  $BC$ ,  $E$  – точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой  $BC$  (см. рисунок а). Из условия касания окружности и прямой  $BC$  следует, что отрезки  $OA$ ,  $OD$  и  $OQ$  равны радиусу  $R$  окружности.

Заметим, что точка  $O$  не может лежать по ту же сторону от прямой  $AB$ , что и точка  $E$ , так как в этом случае расстояние от точки  $O$  до прямой  $BC$  меньше, чем расстояние от неё до точки  $A$ .

Из прямоугольного треугольника  $BPE$  с катетом  $BP = 2$  и  $\angle B = 30^\circ$  находим, что  $PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Так как  $OA = R$  и  $AP = 1$ , получаем:  $OP = \sqrt{R^2 - 1}$ , следовательно,  $OE = \sqrt{R^2 - 1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

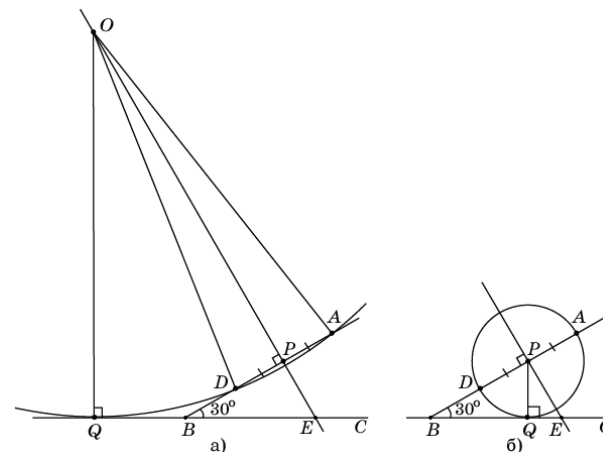
Из прямоугольного треугольника  $OQE$ , в котором  $\angle E = 60^\circ$ , находим:

$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} + 1.$$

В результате получаем уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} = R - 1.$$

Возведём в квадрат обе части этого уравнения и приведём подобные члены. Получим уравнение  $R^2 - 8R + 7 = 0$ , решая которое находим два корня:  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 7$ . Если радиус равен 1, то центром окружности является точка  $P$  (см. рисунок б).



**Ответ:** 1 или 7.

**Другое решение.**

Пусть точка  $Q$  касания окружности с прямой  $BC$  лежит на луче  $BC$  (см. рисунок а). По теореме о касательной и секущей

$$BQ^2 = BA \cdot BD = (BD + DA) \cdot BD = (1 + 2) \cdot 1 = 3,$$

откуда  $BQ = \sqrt{3}$ .

Пусть  $O$  – точка пересечения луча  $BA$  и перпендикуляра к  $BC$ , проведённого через точку  $Q$ . Из прямоугольного треугольника  $BQO$  находим:

$$BO = \frac{BQ}{\cos 30^\circ} = 2, \text{ тогда } AO = OD = 1 \text{ и } OQ = \frac{1}{2} BO = 1.$$

Таким образом, точка  $O$  удалена от точек  $A$ ,  $D$  и  $Q$  на одно и то же расстояние, равное 1. Следовательно,  $O$  – центр искомой окружности, а её радиус равен 1.

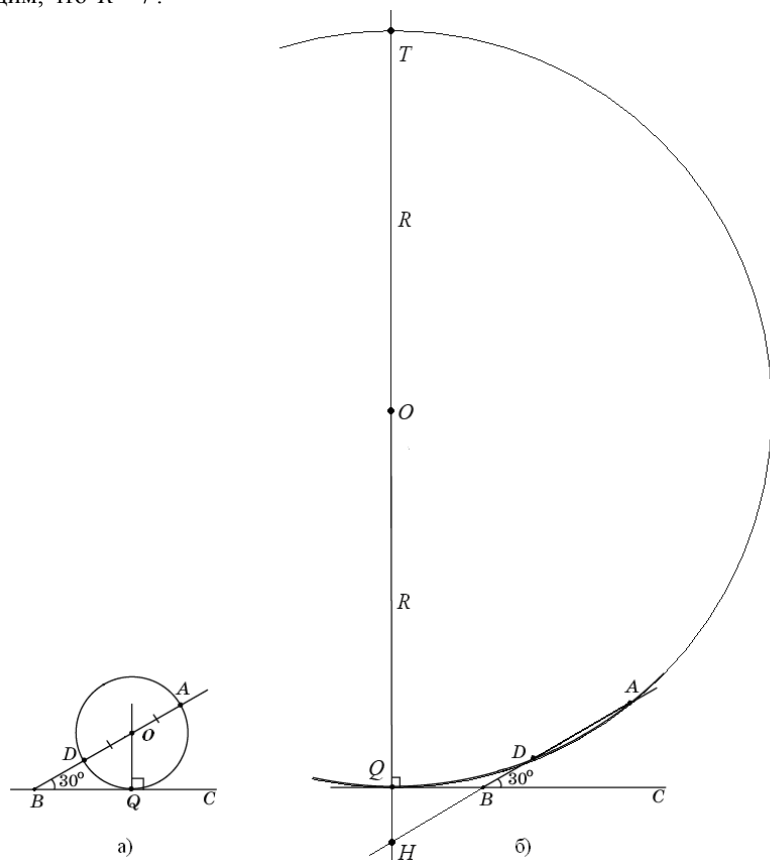


Пусть теперь точка  $Q$  касания окружности с прямой  $BC$  лежит на продолжении  $BC$  за точку  $B$  (см. рисунок б), а прямая, проходящая через точку  $Q$  перпендикулярно  $BC$ , пересекает прямую  $AB$  в точке  $H$ , а окружность вторично – в точке  $T$ . Тогда

$$BQ = \sqrt{BA \cdot BD} = \sqrt{3}, \quad \angle HBQ = \angle ABC = 30^\circ,$$

$$BH = \frac{BQ}{\cos 30^\circ} = 2, \quad HQ = \frac{1}{2}BH = 1.$$

Если  $R$  – радиус окружности, то  $QT = 2R$ . По теореме о двух секущих  $HQ \cdot HT = HA \cdot HD$ , то есть  $1 \cdot (1 + 2R) = (2 + 3) \cdot 3$ , откуда находим, что  $R = 7$ .



**Ответ:** 1 или 7.

**Возможны другие формы записи ответа.** Например:

- А) 1, 7;
- Б) радиус окружности равен 7 или 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины, или рассмотрены обе конфигурации, для которых получены значения искомой величины, неправильные из-за арифметических ошибок	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**C5**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$  больше 1.

**Решение.**

1. Функция  $f$  имеет вид:

а) при  $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ :  $f(x) = x^2 + 2(a - 4)x + 7$ , а её график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии  $x = 4 - a$ ;

б) при  $x^2 - 8x + 7 < 0$ :  $f(x) = -x^2 + (2a + 8)x - 7$ , а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции  $f(x)$  показаны на рисунках:

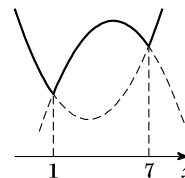


Рис. 1

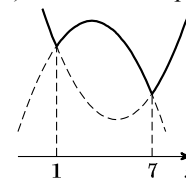


Рис. 2

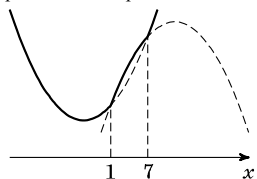


Рис. 3

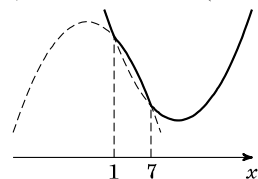


Рис. 4

2. Наименьшее значение функция  $f(x)$  может принять только в точках  $x = 1$  или  $x = 7$ , а если  $4 - a \notin [1; 7]$  – то в точке  $x = 4 - a$ .

3. Наименьшее значение функции  $f$  больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + |a^2 - 9| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a > \frac{1}{14}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - |a^2 - 9| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3, \\ a^2 - 8a + 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3, \\ 4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3, \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3, \\ \frac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \frac{4 + \sqrt{40}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq a < 4 + \sqrt{6} \\ \frac{1}{2} < a < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}.$$

**Ответ:**  $(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6})$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

**C6**

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно  $-3$ , среднее арифметическое всех положительных из них равно  $4$ , а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно  $-8$ .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Решение.**

Пусть среди написанных чисел  $k$  положительных,  $l$  отрицательных и  $m$  нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому  $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$ .

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому  $k + l + m$  — количество целых чисел — делится на 4. По условию  $40 < k + l + m < 48$ , поэтому  $k + l + m = 44$ . Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство  $4k - 8l = -3(k + l + m)$  к виду  $5l = 7k + 3m$ . Так как  $m \geq 0$ , получаем, что  $5l \geq 7k$ , откуда  $l > k$ . Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в оценка Подставим  $k + l + m = 44$  в правую часть равенства  $4k - 8l = -3(k + l + m)$ :  $4k - 8l = -132$ , откуда  $k = 2l - 33$ . Так как  $k + l \leq 44$ , получаем:  $3l - 33 \leq 44$ ,  $3l \leq 77$ ,  $l \leq 25$ ,  $k = 2l - 33 \leq 17$ ; то есть положительных чисел не более 17.

в пример Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число  $-8$  и два

раза написан 0. Тогда  $\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = \frac{68 - 200}{44} = -3$ , указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

**Ответ:** а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), $V_{\text{пример}}$ , $V_{\text{оценка}}$	4
Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), $V_{\text{пример}}$ , $V_{\text{оценка}}$	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), $V_{\text{пример}}$ , $V_{\text{оценка}}$	2
Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), $V_{\text{пример}}$ , $V_{\text{оценка}}$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4