ОТЛИЧНИК ЕГЭ

ФИПИ

Федеральный институт педагогических измерений

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

МАТЕМАТИКА

РЕШЕНИЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

97 100 98

95 99 96

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ФИПИ

ОТЛИЧНИК ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

Решение сложных задач

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

«Интеллект-Центр»
2010

Панферов В.С., Сергеев И.Н.

О 80 Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010. – 80 с.

ISBN 978-5-89790-612-3

Книга посвящена важнейшей части единого государственного экзамена по математике – заданиям типа С (с развернутым ответом). Данная книга является дополнением к учебному пособию «ЕГЭ 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся» под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко, выпущенной издательством ранее. Дана общая характеристика новой версии ЕГЭ 2010 г. Подробно освещены все аспекты подготовки школьников к этому экзамену в новых условиях. Приведены примеры задач части С, которые снабжены решениями, комментариями и критериями оценивания работ. Предложены задачи для самостоятельного решения, а также подготовительные задачи и список литературы для самостоятельной подготовки к экзамену.

Книга адресована учащимся старших классов, учителям математики и методистам.

УДК 373.167.1:51(075.3)
ББК 22.1я721

Генеральный директор
издательства «Интеллект-Центр» *М. Б. Миндюк*

Редактор *Д. П. Локтионов*
Технический редактор *В. С. Торгашова*
Художественный редактор *Е. Ю. Воробьева*
Компьютерная верстка и макет: *В. Н. Погодин*

Подписано в печать 07.12.2009 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,0. Тираж 7000 экз.

ISBN 978-5-89790-612-3

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена наиболее трудной составляющей единого государственного экзамена по математике — заданиям типа С. В книге подробно разобраны все аспекты новой версии ЕГЭ по математике 2010 г., относящиеся к части С. Кроме того, в тексте даны содержательные рекомендации выпускникам средних школ, их учителям и наставникам по подготовке к этой версии экзамена.

Хорошо известно, что в 2010 г. единый государственный экзамен по математике будет происходить по-новому. Это будет экзамен не по алгебре и началам анализа, как в прежние годы проведения ЕГЭ, а по всему курсу элементарной математики в рамках программы средней школы (в соответствии с Федеральным компонентом стандарта по математике, утвержденным в 2004 г.).

Вариант ЕГЭ 2010 г. будет состоять не из трех частей, как раньше, а только из двух. Теперь в нем вовсе не будет задач типа А (с выбором ответа), зато останутся:

- задачи типа В (с кратким ответом), оформленные в виде первой части экзаменационного варианта и носящие характер зачетных заданий по школьному курсу математики;
- задачи типа С (с развернутым ответом), образующие вторую часть варианта, напоминающую как по форме, так и по содержанию вузовский вариант вступительного экзамена по математике.

Именно эти, последние задачи и обсуждаются, прежде всего, в настоящем пособии.

- Во-первых, по каждой из планируемых экзаменационных тем здесь разобраны (решены и прокомментированы) разнообразные примеры задач типа С.
- Во-вторых, описаны новые подходы к оцениванию будущих школьных решений этих задач, приведены предполагаемые критерии их оценивания.

Гарантией успешной сдачи экзамена, содержащего как простые, так и сложные задачи, является систематическое углубленное изучение собственно математики. Это изучение подразумевает регулярную и напряженную работу. Оно включает в себя решение многочисленных задач, обсуждение различных математических сюжетов и идей с учителями, преподавателями курсов и кружков, а также поиск новых приемов и подходов к решению задач.

В этой связи, особую ценность настоящему пособию придают следующие включенные в него материалы:

- раздел задач для самостоятельного решения, с ответами и указаниями к их решениям;
- раздел подготовительных задач, обусловленный как образовательными целями (выпускникам полезно уметь выполнять те простейшие упражнения, из которых впоследствии складываются более сложные задачи), так и чисто практическими (ведь не каждый выпускник сможет решить полностью каждую из задач части С, но даже за неполное ее решение он сможет получить некоторое число баллов на экзамене).
- список книг, методических пособий и сборников задач, которые много лет оказывали помощь школьникам в изучении математики и подготовке к выпускным и вступительным экзаменам.

В подготовке настоящего издания большую помощь авторам оказали студенты механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова А. Трепалин, А. Годнева, Е. Кукса, О. Заплетина, И. Нетай, которые вычитали рукопись, прорешали все задачи и выверили ответы к ним.

Работа над изданием выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 08-06-00144а.

В. С. Панферов, И. Н. Сергеев

ГЛАВА 1. ОСОБЕННОСТИ ВУЗОВСКОЙ ЧАСТИ ЭКЗАМЕНА

Общая характеристика вузовской части

Вторая часть варианта ЕГЭ 2010 года состоит из 6 задач типа С (*с развернутым ответом*), среди которых:

- первые четыре задачи (С1—С4) имеют *повышенный* уровень сложности,
- последние две (С5 и С6) — *высокий.*

Основной целью этой, так сказать, «вузовской» части варианта (в отличие от первой его части, носящей характер «зачета» по курсу математики средней школы) является дифференциация выпускников в отношении их возможностей дальнейшего обучения в вузах с различными требованиями к математической подготовке учащихся.

Задания всей части 2 в целом предназначены для проверки знаний на том уровне требований, который традиционен в вузах с профильным экзаменом по математике. При этом последние два задания позволяют особенно тщательно отбирать выпускников в вузы, где требования к математической подготовке достаточно высоки.

Специфика заданий типа С

Итогом работы выпускника над каждой задачей типа С являются представленные им на экзамене:

- *ответ* на поставленный в задании вопрос;
- *текст* решения задачи.

По большому счету, ответ к задаче также можно считать неотъемлемой частью ее *решения* (в широком смысле), что мы и будем подразумевать в дальнейшем. Решения задач записываются в специальный бланк № 2, выдаваемый выпускнику непосредственно на экзамене.

Возможные *оценки в баллах*, выставляемые за решения задач части 2, таковы:

- за задачи С1 и С2 — по 0, 1 или 2 балла;

• за задачи С3 и С4 — по 0, 1, 2 или 3 балла;

• за задачи С5 и С6 — по 0, 1, 2, 3 или 4 балла.

Не максимально возможное количество баллов за задачу ставится только в том случае, если в ее решении допущены ошибки, неточности, пробелы или имеются существенные недостатки обоснования. Подчеркнем, что на экзамене снижение оценки за решение задачи должно производиться в строгом соответствии с заранее утвержденными *критериями*.

Далеко не праздным является вопрос о том, *какие способы* решения задачи и записи ее ответа допустимы на едином государственном экзамене. Главным требованием к решению была и остается его *математическая правильность*, а именно:

• в ответ необходимо включить только верные значения искомой величины, причем все;

• форма записи ответа может быть любой из употребляемых в современной учебной литературе;

• текст решения должен служить реальным обоснованием (точнее, доказательством) правильности полученного ответа;

• при решении задачи любого содержания приемлемы любые математические методы — алгебраические, функциональные, графические, геометрические, логические, комбинаторные и т. д.;

• рациональность решения, равно как и его нерациональность, на экзамене во внимание не принимается.

Задания типа С в ЕГЭ 2010 года

В заданиях типа С, ожидаемых в вариантах 2010 года:

• содержатся две (а не одна, как прежде) задачи по геометрии — а именно, стереометрическая задача С2 и планиметрическая задача С4;

• формулировки не используют терминологии, относящейся к математическому анализу (она используется в некоторых задачах типа В), однако это совершенно не исключает возможности применения школьниками на экзамене, например, производной для исследования функции на экстремум или на монотонность;

• нет задач по разделу «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» и ни по каким разделам элементарной математики, не содержащимся в федеральном компоненте стандарта школьного математического образования.

Особенности проверки работ в 2010 году

По сравнению с предыдущими годами проведения ЕГЭ модель оценивания решений задач типа С в 2010 году значительно изменена. Новая система оценки призвана продолжить *лучшие традиции* проверки работ, сложившиеся на школьных выпускных экзаменах, на вступительных экзаменах в вузы и даже, отчасти, на математических олимпиадах школьников.

Не секрет, что прежние критерии оценки были слишком формальными и недостаточно гуманными по отношению к экзаменуемому: его решение чисто механически сравнивалось с предложенным в методичке; за отсутствие очевидных пояснений или ссылок, а также за малейшую неточность снижались баллы, причем за грубую ошибку — сразу до нуля. Из всех критериев предшествующих лет наиболее близки по духу к новой системе оценивания работ, пожалуй, критерии проверки задач С3—С5 на ЕГЭ по математике в 2009 году.

Новые *критерии оценки* основываются на следующих *принципах*, которые при проверке работ на экзамене 2010 года предполагается установить для экспертов обязательными.

- Проверяется только математическое содержание представленного решения, а погрешности его оформления не являются поводом для снижения оценки.
- Ответ может быть записан в любом виде; оценивается не форма записи ответа, а его правильность.
- Степень подробности обоснований в решении должна быть разумно достаточной. Претензии к решению, связанные с отсутствием ссылок на правомерно используемые стандартные факты и правила (как-то: равенство вертикальных углов, теорема Пифагора, формула корней квадратного уравнения, действия со степенями или логарифмами, свойства неравенств и многие многие другие), не предъявляются.
- Решение задачи, в котором обоснованно получен правильный ответ, оценивается максимальным числом баллов.
- Наличие правильного ответа при полном отсутствии текста решения оценивается в ноль баллов.
- Некоторые погрешности решений, не оказавшие существенного влияния на его обоснованность и принципиальную правильность, могут расцениваться как описки и не приводить к снижению оценки.

- Если на каком-либо этапе решения допущена грубая ошибка, то другие его этапы, проведенные в работе правильно, могут быть, тем не менее, оценены положительно, в соответствии с критериями.
- При определении итоговой оценки решения выбирается максимально возможное число баллов, которое можно выставить в соответствии с утвержденными критериями.
- При проверке оригинальных или нестандартных решений на экзамене вырабатываются частные критерии их оценки, соответствующие (аналогичные) общим.

В качестве совершенно грубого ориентира, приводим таблицу для весьма приблизительного перевода возможных оценок в баллах, выставляемых за решения задач С1—С6, в привычные школьные оценки «2», «3», «4», «5».

Баллы	C1	C2	C3	C4	C5	C6
4	—	—	—	—	«5»	«5»
3	—	—	«5»	«5»	«4»	«4»
2	«5»	«5»	«4»	«4»	«3»	«3»
1	«3—4»	«3—4»	«3»	«3»	«2—3»	«2—3»
0	«2»	«2»	«2»	«2»	«2»	«2»

Как подготовиться к заданиям вузовской части

При подготовке к этим заданиям нужно учесть следующие три аспекта.

- Во-первых, единый государственный экзамен в целом опирается, конечно же, на *школьную программу*. Поэтому уверенное знание программы по математике и хорошее владение ею — необходимое условие успешной сдачи ЕГЭ. Эта программа в основном определена и подкреплена огромным количеством самых разнообразных учебников. Однако среди обилия учебников по математике советуем выбирать те, что отличаются большей глубиной проникновения в излагаемый материал и рассчитаны на более вдумчивого учащегося. Эти качества учебников способны в перспективе оказать экзаменуемому существенную помощь.

- Во-вторых, чтобы подготовиться к какому-либо экзамену, вообще, нужно, для начала, изучить *историю вопроса*, а именно: узнать, какие задачи давались на экзамене в прошлые годы, какими методами предполагалось их решать, каковы были требования к их оформлению и т. п. Кроме того, следует сделать поправку на предполагаемые нововведения (которых в 2010 году как раз будет больше обычного), для чего имеет смысл внимательно изучить демоверсию предстоящего экзамена, пробные или тренировочные варианты, а также другие материалы, дающие более полное представление о будущих задачах.
- В-третьих, желательно иметь некоторый *запас прочности*, т. е. знать и уметь несколько больше того минимума, который вытекает из опыта предыдущих экзаменов. Ведь не секрет, что варианты экзаменационных заданий постепенно развиваются и усложняются: то, что раньше казалось новым и трудным для восприятия, со временем становится привычным и элементарным. В общем, нельзя ориентироваться только на вчерашний день. А учитывая, что ожидаемые в 2010 году задачи типа С будут в значительной степени опираться на опыт вступительных экзаменов, хорошо бы приобрести и проработать современные пособия для поступающих в вузы, содержащие грамотные подборки задач и возможных методов их решения.

Рекомендуемая литература

Для прохождения школьного курса математики необходим комплект школьных учебников, желательно из федерального комплекта, утвержденного Министерством образования РФ. При этом для подготовки к ЕГЭ, кроме учебников по математике, предназначенных для 10—11 классов, нужны также учебники по планиметрии для 7—9 классов и по алгебре для 8—9 классов. Желательно использовать те из них, по которым математика изучалась ранее.

Кроме учебников, особенно для изучения приемов решения задач части С, рекомендуем выбрать 2—3 проверенных временем методических пособия и задачника по элементарной математике.

1. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Под редакцией М. И. Сканави, М. «Высшая школа», 1998 и другие издания.

2. *В. В. Ткачук*. Математика абитуриенту. М. Издательство МЦНМО, разные годы.
3. *Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов*. Математика для поступающих в вузы, М. «Дрофа», 1976 и другие издания.
4. *И. И. Мельников, И. Н. Сергеев*. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах, М. Учебно-научный центр довузовского образования МГУ, 1994.
5. *М. И. Шабунин*. Математика для поступающих в вузы. М. Лаборатория базовых знаний,1999.
6. *И. Н. Сергеев*. Математика. Задачи с ответами и решениями, М. «Высшая школа», 2003.
7. *И. Н. Сергеев*. ЕГЭ. Математика. Задания типа С. М. «Экзамен», 2009.
8. *П. В. Семенов*. Как нам подготовиться к ЕГЭ. Математика. Выпуски 1—4. М. Издательство МЦНМО, 2008.
9. *И. Ф. Шарыгин*. Задачи по геометрии. Стереометрия. М. «Наука», 1984.
10. *И. Ф. Шарыгин*. Геометрия. Классы 9—11. М. «Дрофа», 1996.
11. *И. Ф. Шарыгин*. Решение задач. М. «Просвещение», 1994.
12. *И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев*. Факультативный курс по математике. Решение задач. М. «Просвещение», 1991.
13. *Р. К. Гордин*. Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы, М. МЦНМО, 2008.
14. *Р. К. Гордин*. Это должен знать каждый матшкольник. М. МЦНМО, 2008.
15. *В. И. Голубев*. Решение сложных и нестандартных задач по математике. М. «ИЛЕКСА», 2007.
16. *В. В. Прасолов*. Задачи по планиметрии. Части 1—2. М. МЦНМО, 2007.
17. *В.В. Прасолов*. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М. Издательство МЦНМО, 2007.
18. *С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко*. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. М. Издательство московского университета, 1991.
19. *П. И. Горштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир*. Задачи с параметрами. Киев, «Евроиндекс», 1995.

20. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ. М. Механико-математический факультет МГУ, разные годы.
21. Задачи вступительных экзаменов по математике. М. Факультет Вычислительной математики и кибернетики МГУ, разные годы.
22. Московские математические олимпиады. 19930–2005 гг. М. Издательство МЦНМО, 2006.
23. Всероссийские математические олимпиады школьников. М. «Просвещение», 1992.
24. Всероссийские олимпиады школьников по математике. 1993–2006. М. Издательство МЦНМО, 2006.
25. *Д. В. Фомин.* Санкт-Петербургские математические олимпиады 1961–1993 гг. СП. Издательство ПОЛИТЕХНИКА, 1994.
26. *В. Я. Галкин, Д. Ю. Сычугов, Е. В. Хорошилова.* Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. Учебное пособие для абитуриентов и школьников. М. Факультет ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2002.

Для непосредственной подготовки к ЕГЭ также можно рекомендовать:

1. *И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров.* Подготовка к ЕГЭ по математике. 2010 г. М. Издательство МЦНМО, 2009.
2. *И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров.* Математика. ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь. М. «Экзамен», 2010.
3. Математика. Сборник тренировочных работ. Под редакцией А. Л.Семенова и И. В.Ященко. М. Издательство МЦНМО, 2009.
4. Математика. ЕГЭ-2010. Типовые тестовые задания, Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М. «Экзамен», 2009.
5. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ-2010. Математика. Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко. М. «Астрель», 2009.
6. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. М. Интеллект-Центр, 2010.

Мы не считаем, что все перечисленные пособия должны находиться в личной библиотеке абитуриента, да это и невозможно. Однако считаем, что каждая из них по-своему полезна и найдет своего благодарного читателя.

Сборники как конкурсных, так и олимпиадных задач мы рекомендуем тем, кто хочет познакомиться со стандартными постановками и классическими методами решения задач высокого уровня сложности.

О роли учителя в подготовке школьников к ЕГЭ

Новая идеология единого государственного экзамена состоит, в частности, в том, что на нем определяется только «порог» для выставления аттестационной оценки, а не сама оценка. Этот тезис может быть превратно истолкован учителем, как снятие с него всякой ответственности за подготовку ученика к решению задач части 2.

Такое заниженное восприятие преподавателем своей роли логически возможно, однако представляется нам бесперспективным. Педагог, заботящийся о своей репутации и думающий о своем будущем, разумеется, не будет ограничиваться лишь минимальным уровнем подготовки своих подопечных для получения ими аттестата о среднем образовании (хотя, возможно, для некоторых выпускников и этот уровень окажется запредельным).

В этой связи, подчеркнем следующие принципиальные моменты.

- Личная, исключительно прагматическая, цель выпускника — подготовка к экзамену, определяющему его дальнейшее образование и карьеру, — *напрямую увязана* с главной общеобразовательной целью, стоящей перед учителем математики, — повышение уровня математической подготовки его учеников.

- Подготовка к предлагаемой форме экзамена по математике состоит *не в натаскивании* выпускников на какие-то определенные типы задач, а в систематическом и обстоятельном изучении самого предмета как на уроках в школе, так и в процессе самостоятельной работы учащихся.

- В варианте ЕГЭ по математике 2010 года отсутствуют задания типа А (с выбором ответа), оказывавшие негативное обратное влияние на преподавание математики в школе. Тем самым, остановлена опасная тенденция обучения школьников не *методам решения* задач, а приемам угадывания правильного ответа.

ГЛАВА 2. ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ТИПА С

Рассмотрим подробнее образцы каждой из задач вузовской части ЕГЭ (ни в коем случае не следует ожидать именно этих задач на реальном экзамене 2010 года).

Образцы задач С1

Предполагается, что это — самая простая задача вузовской части варианта ЕГЭ. Само задание формулируется привычно для выпускника средней школы, а именно — «Решите систему уравнений». При этом уравнения системы содержат только совершенно стандартные выражения.

Решение этой задачи доступно любому прилежному ученику и рассчитано на поступающих в вузы с невысокими требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Задача С1-1

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 16^{\cos x} - 10\cdot 4^{\cos x} + 16 = 0, \\ \sqrt{y} + 2\sin x = 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое уравнение системы:

$$16^{\cos x} - 10\cdot 4^{\cos x} + 16 = 0 \iff \left(4^{\cos x} - 2\right)\cdot\left(4^{\cos x} - 8\right) = 0 \iff$$

$$\iff 4^{\cos x} = 2 \text{ (так как } 4^{\cos x} \leqslant 4) \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Рассмотрим два случая:

а) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow \sin x > 0$:

уравнение $\sqrt{y} + 2\sin x = 0$ решений не имеет;

б) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$\sqrt{y} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = 3.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $y = 3$.

Комментарий к задаче С1-1.

Данная система содержит показательные, тригонометрические выражения и корни:

- первое уравнение системы содержит только одну неизвестную и с помощью стандартной замены переменной сводится к квадратному, в котором только один корень приводит к реальному значению неизвестной;
- для нахождения второй неизвестной из второго уравнения приходится перебирать случаи, отбирая те из них, при которых она действительно определяется.

Невнимательный школьник может наделать следующих ошибок:

- решить уравнение $4^{\cos x} = 8$ и получить в нем также конкретные значения неизвестной;
- не заметить вообще существование случая отрицательного значения $\sin x$;
- при положительном значении $\sin x$ привести второе уравнение к виду $\sqrt{y} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ и возвести его в квадрат, не заметив, что оно не имеет корней.

Задача С1-2

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x. \end{cases}$$

Решение.

1. Сделаем замену $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = t$. Тогда $x^2 + 3x = t^2 + 1$ и из первого уравнения получаем:

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Корни: $t_1 = 3$ и $t_2 = -2$, т. е.

$$\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3 \text{ или } \sqrt{x^2 + 3x - 1} = -2.$$

Второе уравнение не имеет корней.

Решим первое:

$$x^2 + 3x - 10 = 0;$$
$$x = -5 \text{ или } x = 2.$$

2. При каждом из найденных значений x решим второе уравнение.

а) Если $x = -5$, то из второго уравнения получаем:

$$\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}},$$

но $\frac{25}{8} > 1$, поэтому $\frac{5}{2\sqrt{2}} > 1$, значит, полученное уравнение не имеет решений, поскольку его правая часть меньше, чем -1.

б) Если $x = 2$, то из второго уравнения получаем:

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = 2$, $y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Комментарий к задаче С1-2.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) $x = 2$, $y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

Б) $\begin{cases} x = 2, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \end{cases}$

В) $\left(2; (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ.
1	Верно решено первое уравнение, но в системе получен неточный ответ (отличающийся от верного тем, что в него включена посторонняя серия, в которой $x = -5$).
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С1-3

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения находим

$$0 = \cos^2 x - \cos^2 y = 1 - \sin^2 x - 1 + \sin^2 y =$$
$$= -(\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y).$$

Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin x + \sin y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\sin y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Задача С1-4

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Решение.

1. Если $\cos y = 0$, то $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и второе уравнение дает

$$x = \sin y = (-1)^k.$$

2. Если $\cos y > 0$, то из первого уравнения находим:

$$x = 3 \text{ или } x = -\frac{1}{2}.$$

а) при $x = 3$ второе уравнение не имеет решений;

б) при $x = -\frac{1}{2}$, с учетом условия $\cos y > 0$, получаем

$$y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\left((-1)^k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

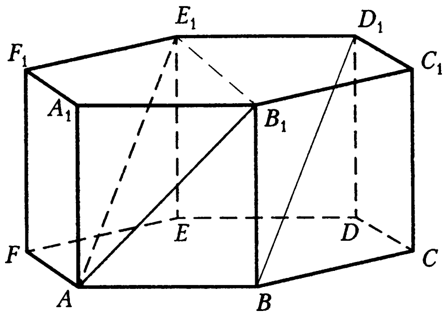
Образцы задач С2

Задача С2 — стереометрическая, на нахождение некоторой величины в заданном стандартном многограннике. Вычисления, необходимые получения ответа, довольно просты. Однако для их обоснования от учащегося, возможно, потребуется наличие определенной доли пространственного воображения и умение проводить несложные дополнительные построения.

Задача С2-1

Все ребра правильной призмы $ABCDEFA_1...F_1$ равны по 1. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.

Решение.



1. Угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и BD_1 равен углу между пересекающимися прямыми AB_1 и AE_1, так как $AE_1 \parallel BD_1$ (см. рис.).

2. Найдем косинус угла B_1AE_1:

a. $AB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (прямоугольный ΔAEE_1);

b. $AE = 2 \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$ (равнобедренный ΔAFE);

c. $AE_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ (прямоугольный (ΔABB_1));

d. $B_1E_1 = B_1O_1 + O_1E_1 = 2$ (O_1 — центр описанной окружности около правильного шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$), поэтому $B_1E_1 = AE_1$;

e. $\cos\angle B_1AE_1 = \dfrac{\frac{AB_1}{2}}{AE_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (равнобедренный ΔAB_1E_1).

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Комментарий к задаче С2-1.

В этой задаче требуется найти косинус угла между заданными прямыми в конкретной правильной призме.

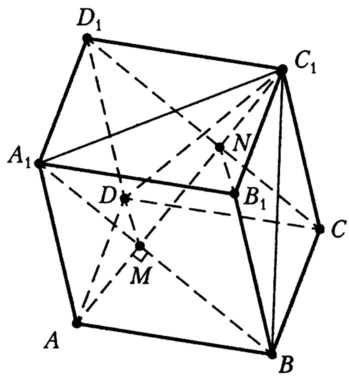
Анализ условия данной задачи и данного ее решения показывает, что она совсем несложная:

- основная идея решения (на которую наталкивает само определение угла между скрещивающимися прямыми) состоит в нахождении такого параллельного переноса одной из двух указанных прямых, в результате которого она пересекает другую прямую;
- вычислительные трудности здесь не возникают, поскольку все выкладки связаны исключительно с соотношениями в прямоугольных или равнобедренных треугольниках (с теоремой Пифагора и простейшей тригонометрией).
- задача допускает и другие способы решения (например, с использованием теоремы косинусов, через координаты или векторы).

Задача С2-2

К диагонали куба, соединяющей две его вершины, не лежащие в одной грани, провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

Решение.



Пусть на диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 спроектировали все остальные вершины. Для вершины B имеем:

$$AB = 1,\ BC_1 = \sqrt{2}.$$

Диагональ куба AC_1 равна $\sqrt{3}$. В треугольнике ABC_1:

$$AB^2 = AM \cdot MC,$$

откуда $1 = AM \cdot \sqrt{3}$

(пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике).

Следовательно, $AM = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}AC_1$, откуда $AM : MC_1 = 1:2$.

Таким же способом находим, что проекции точек A_1 и D делят диагональ AC_1 в том же отношении. Значит, вершины A_1 и D проектируются также в точку M.

Аналогично, вершины D_1, C и B_1 имеют общую проекцию N, которая делит диагональ в отношении $AN:NC_1 = 2:1$.

Поэтому $AM:MN:NC_1 = 1:1:1$.

Ответ: на три части, в отношении $1:1:1$.

Комментарий к задаче С2-2.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) на 3 равные части;

Б) основания перпендикуляров разделили диагональ на три равные части.

Возможны и другие варианты решения. Приведем некоторые из них.

Решение А задачи С2-2. Рассмотрим три некомпланарных вектора

$$\overrightarrow{AB} = \vec{e_1},\ \overrightarrow{AD} = \vec{e_2},\ \overrightarrow{AA_1} = \vec{e_3}.$$

Длина каждого вектора равна 1, и эти три вектора попарно перпендикулярны. Пусть точка B проектируется на диагональ AC_1 в точку M. Тогда

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC_1} = \lambda\left(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}\right),$$

$$\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AM} = -\vec{e_3} + \lambda\vec{e_1} + \lambda\vec{e_2} + \lambda\vec{e_3} = \lambda\vec{e_1} + \lambda\vec{e_2} + (\lambda - 1)\vec{e_3}.$$

Так как $\overrightarrow{A_1M} \perp \overrightarrow{AC_1}$, их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0$, то есть

$$\lambda + \lambda + \lambda - 1 = 0;\ \lambda = \frac{1}{3}.$$

Аналогично, $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC_1}$; $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC_1}$.

Пусть D_1 проектируется в точку N; аналогично получаем, что $\overrightarrow{C_1N} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1A}$ и $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{C_1CA}$ и $\overrightarrow{B_1N} \perp \overrightarrow{C_1A}$. Значит, отрезки AM, MN и NC_1 равны, то есть диагональ AC_1 разделилась в отношении $1:1:1$.

Решение Б задачи С2-2. Используем координатно-векторный метод. Введем систему координат, считая, что начало координат находится в точке A, а оси координат проходят через точки B, D и A_1 (рис. 1). Тогда в прямоугольном треугольнике AA_1C_1 (рис. 2) находим:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

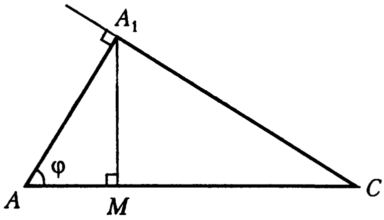


Рис. 1

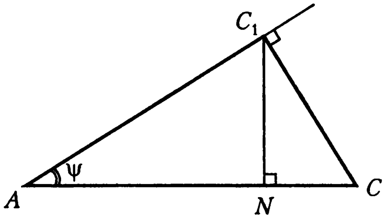


Рис. 2

Также находим, что $AM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, если M – проекция точки D или точки B.

Пусть N – проекция точки C на AC_1. В треугольнике ACC_1 находим:

$$\left|\overrightarrow{AN}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\psi = \frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Аналогично находим, что $\left|\overrightarrow{AN}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, если точка N – проекция точки B_1 или D_1.

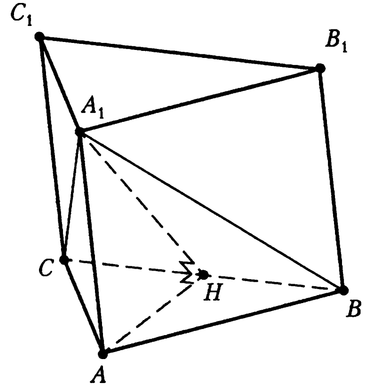
Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	**Содержание критерия**
2	Обоснованно получен верный ответ.
1	Получен верный ответ на первый вопрос задачи, а на второй вопрос ответ не дан или неверен.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С2-3

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Решение.



Обозначим H середину ребра BC (см. рисунок). Так как треугольник ABC равносторонний, а треугольник A_1BC — равнобедренный, отрезки AH и A_1H перпендикулярны BC. Следовательно, $\angle A_1HA$ — линейный угол двугранного угла с гранями BCA и BCA_1.

1) Из треугольника A_1AB найдем: $AA_1 = 1$.

2) Из треугольника AHB найдем: $AH = \sqrt{3}$.

3) Из треугольника HAA_1 найдем: $\operatorname{tg}\angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Поэтому искомый угол равен 30°.

Ответ: 30°.

Возможны другие формы записи ответа. Например:

А) $\frac{\pi}{6}$;

Б) $\frac{\pi}{6}$ рад.

В) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ и т. п.

Возможны другие решения: например, с использованием векторов или метода координат.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

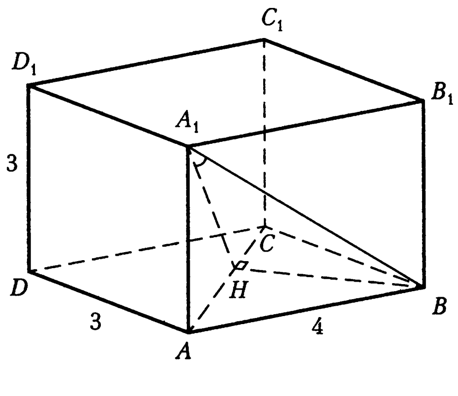
Балл	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ.
1	Построен или описан линейный угол искомого угла или угол между перпендикулярами к плоскостям A_1BC и ABC, но получен неверный ответ или решение не закончено.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С2-4

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$ и $BC = 3$.

Решение.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к прямой AC. Тогда A_1H — проекция отрезка A_1B на плоскость AA_1C, а значит, нужно найти угол BA_1H.



1) В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{12}{5}$.

2) В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

3) В прямоугольном треугольнике A_1HB находим:

$$\sin A_1 = \frac{BH}{A_1B} = \frac{12}{25}.$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{12}{25}$.

Образцы задач С3

Задача состоит в решении неравенства, содержащего логарифмические и рациональные выражения (возможно, и другие, например, иррациональные, но от них в задаче можно легко избавиться).

Задача С3 — несколько более сложная, чем С1: для ее решения от выпускника требуются навыки преобразования выражений с применением формул действий с логарифмами и с учетом изменения областей их определения. Кроме того, ему нужно уметь аккуратно перебирать случаи, применять метод интервалов и производить другие, относительно привычные для учащегося, операции.

Задача С3-1

Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{2x^2-7x+6}}\dfrac{x}{3} > 0.$

Решение.

$$\log_{\sqrt[3]{2x^2-7x+6}}\frac{x}{3} > 0 \iff \frac{\lg x - \lg 3}{\frac{1}{3}\left(\lg(2x^2-7x+6)-\lg 1\right)} > 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x-3}{(2x^2-7x+6)-1} > 0, \\ x > 0, \\ 2x^2-7x+6 > 0 \end{cases}$$

(так как выражение $\lg u - \lg v$ имеет тот же знак, что и $u - v$ при $u, v > 0$),

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x-3}{\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-1)} > 0, \\ x > 0, \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2) > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \in \left(1; \frac{5}{2}\right) \cup (3; +\infty) > 0, \\ x > 0, \\ x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty) > 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} 1 < x < \frac{3}{2}, \\ 2 < x < \frac{5}{2}, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $1 < x < \frac{3}{2}$, $2 < x < \frac{5}{2}$, $x > 3$.

Комментарий к задаче С3-1.

В нашем решении был использован метод замены множителя, благодаря которому удалось в произведении или в дроби одним махом заменить сложно устроенный множитель более простым и удобным для исследования. При этой замене:

- новый множитель должен иметь в точности тот же знак, что и старый (при соответствующих значениях переменной);
- может расширяться область допустимых значений множителя — ее приходится искусственно восстанавливать, добавляя пропавшие ограничения в систему с преобразованным неравенством.

Возможны и другие, совершенно бесхитростные приемы, так или иначе опирающиеся на перебор случаев:

- либо в зависимости от того, больше или меньше единицы основание исходного логарифма;
- либо в зависимости от знаков числителя и знаменателя дроби, получаемой в результате перехода к новому основанию логарифма.

При любом подходе к решению этого неравенства от выпускника требуется умение преобразовывать логарифмические выражения с учетом изменения областей их определения, а также решать рациональные неравенства.

Задача С3-2

Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x} \geqslant 1.$

Решение.

$$\frac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x} \geqslant 1 \iff \frac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)-x}{x} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)-\log_2 2^x}{x} \geqslant 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{3}{2}2^x-1\right)-2^x}{x} \geqslant 0, \\ \dfrac{3}{2}2^x-1>0 \end{cases} \iff$$

(так как выражение $\log_2 u - \log_2 v$ имеет тот же знак, что и $u-v$ при $u, v > 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^x-2}{x} \geqslant 0, \\ 2^x > \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x \geqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \log_2 \dfrac{2}{3} < x \leqslant 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\log_2 \frac{2}{3} < x < 0,\ x \geqslant 1.$

Комментарий к задаче С3-2.

Предложенное решение, опять же, использует метод замены множителя. Однако возможен перебор случаев в зависимости от знаков числителя и знаменателя дроби, получаемой в результате переноса единицы в левую часть неравенства.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
3	Обоснованно получен верный ответ.
2	Ответ не точен, т. к. допущена описка или при в основном правильном решении в ответ включены значения переменной, в которых логарифмируемое выражение обращается в 0.
1	Решение содержит верные преобразования. Из-за ошибок потеряны промежутки решения, либо в ответ включены лишние промежутки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С3-3

Решите неравенство $\dfrac{\log_2 x - 5}{1 - \log_2 x^2} \geqslant 2\log_2 x.$

Решение.

Сделаем замену переменной $t = \log_2 x$. Неравенство принимает вид

$$\frac{t-5}{1-2t} \geqslant 2t \iff 0 \geqslant 2t + \frac{t-5}{2t-1} \iff 0 \geqslant \frac{4t^2-t-5}{2t-1} \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} & t \leqslant -1, \\ & \frac{1}{2} < t \leqslant \frac{5}{4}, \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{aligned} & 0 < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ & \sqrt{2} < x \leqslant 2\sqrt[4]{2}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ и $\sqrt{2} < x \leqslant 2\sqrt[4]{2}$.

Комментарий к задаче С3-3

Предложенное решение использует метод замены переменной с последующим решением рационального неравенства и учетом области определения.

Возможны и другие приемы, так или иначе опирающиеся на перебор случаев:

- либо в зависимости от того, больше или меньше нуля знаменатель левой части неравенства;
- либо в зависимости от знаков числителя и знаменателя дроби, получаемой в результате переноса правой часть неравенства в левую.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	**Содержание критерия**
3	Обоснованно получен верный ответ.
2	Ответ не точен, т. к. допущена описка или при в целом правильном решении в ответ включены значения переменной, в которых логарифмируемое выражение обращается в 0.
1	Решение содержит верные преобразования. Из-за ошибок потеряны промежутки решения, либо в ответ включены лишние промежутки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С3-4

Решите неравенство

$$\log_2(x^2-4) - 3\log_2\frac{x+2}{x-2} > 2.$$

Решение.

Решение ищем на множестве $x^2 - 4 > 0 \iff \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -2. \end{array}\right.$

На этом множестве допустимы преобразования:

$$2 < \log_2\frac{(x-2)^4}{(x+2)^2} \iff 4 < \frac{(x-2)^4}{(x+2)^2} \iff 2|x+2| < (x-2)^2.$$

С учетом области определения, имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2, \\ 2x+4 < x^2-4x+4, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2, \\ -2x-4 < x^2-4x+4 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2, \\ 0 < x^2-6x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2, \\ 0 < x^2-2x+8 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x > 6, \\ x < -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x < -2$ или $6 < x$.

Комментарий к задаче С3-4.

Предложенное решение использует метод сведения решения к решению простейшего логарифмического неравенства с последующим решением рационального неравенства и учетом области определения.

Возможны и другие приемы, так или иначе опирающиеся на перебор случаев в зависимости от рассматриваемой части области определения. Приведем пример.

Другое решение задачи С3-4.

Из неравенства следует, что либо $x > 2$, либо $x < -2$.

1. Если $x > 2$, то неравенство принимает вид

$$\log_2(x+2) - 2\log_2(x-2) < -1;$$

$$\log_2 2(x+2) < \log_2(x-2)^2;$$

$$2x+4 < (x-2)^2;$$

$$x^2-6x > 0;$$

$$x(x-6) > 0.$$

Учитывая, что $x > 2$, получаем: $x > 6$.

2. Если $x < -2$, то неравенство принимает вид

$$\log_2(-x-2) - 2\log_2(2-x) < -1;$$
$$\log_2 2(-x-2) < \log_2(2-x)^2;$$
$$-2x - 4 < (2-x)^2;$$
$$x^2 - 2x + 8 > 0.$$

Полученное неравенство выполняется при всех x.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
3	Обоснованно получен верный ответ.
2	Ответ не точен, т. к. допущена описка или при в целом правильном решении в ответ включены значения переменной, в которых логарифмируемое выражение обращается в 0.
1	Решение содержит верные преобразования. Из-за ошибок потеряны промежутки решения, либо в ответ включены лишние промежутки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С3-5

Решите неравенство $\log_{x+3}(9-x^2) - \frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \geqslant 2$.

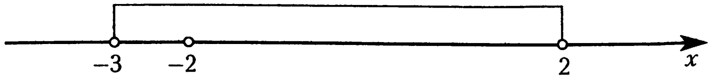
Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{x+3}\big((3-x)(3+x)\big) - \frac{1}{4}\log^2_{x+3}|x-3| \geqslant 2.$$

Найдем, при каких значениях x левая часть неравенства имеет смысл:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ x + 3 \neq 1, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (3-x)(3+x) > 0, \\ x > -3, \\ x \neq -2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$



Получаем: $-3 < x < -2$ или $-2 < x < 3$.

Значит, $|x-3| = 3-x$ при всех допустимых значениях x. Поэтому

$$\log_{x+3}(3-x) + \log_{x+3}(3+x) - \frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x) \geqslant 2;$$

$$\log_{x+3}(3-x) + 1 - \frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x) \geqslant 2.$$

Сделаем замену $\log_{x+3}(3-x) = y$. Получаем:

$$y - \frac{1}{4}y^2 \geqslant 1; \quad y^2 - 4y + 4 \leqslant 0; \quad (y-2)^2 \leqslant 0; \quad y = 2.$$

Таким образом, $\log_{x+3}(3-x) = 2$, откуда

$$(x+3)^2 = 3-x;$$
$$x^2 + 7x + 6 = 0.$$

Корни уравнения: -6 и -1.

Условию $-3 < x < -2$ или $-2 < x < 3$ удовлетворяет только $x = -1$.

Ответ: -1.

Комментарий к задаче С3-5.

Можно не находить область допустимых значений x, а прийти к соотношению $|x-3| = 3-x$ другим способом. Тогда решение будет более коротким.

Другое решение задачи С3-5.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{x+3}\left((3-x)(3+x)\right) - \frac{1}{4}\log^2_{x+3}|x-3| \geqslant 2.$$

Заметим, что $x+3 > 0$ и $(3-x)(3+x) > 0$. Значит, $3-x > 0$.

Поэтому $|x-3| = 3-x$. Получаем:

$$\log_{x+3}(3-x) + 1 - \frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x) \geqslant 2.$$

Сделаем замену $\log_{x+3}(3-x) = y$. Получаем:

$$y - \frac{1}{4}y^2 \geqslant 1; \quad y^2 - 4y + 4 \leqslant 0; \quad (y-2)^2 \leqslant 0; \quad y = 2.$$

Таким образом, $\log_{x+3}(3-x) = 2$;

$$\begin{cases} (x+3)^2 = (3-x), \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+7x+6 = 0, \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -6, \end{array}\right. \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad x = -1.$$

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
3	Обоснованно получен верный ответ.
2	При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильность последовательности рассуждений, и, возможно, приведшая к неверному ответу.
1	Получен ответ, содержащий наряду с правильным постороннее решение.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Образцы задач С4

Эта задача — по планиметрии. В ней требуется найти некоторую величину в заданной геометрической фигуре. Задача С4 хотя и плоская, но более сложная, чем С2.

Дело в том, что для ее решения выпускнику необходимо преодолеть некоторые трудности: глубоко изучить данную конфигурацию, провести дополнительное построение, применить целый комплекс геометрических теорем или фактов и т.д. Такие навыки можно приобрести, решив самостоятельно изрядное количество подобных задач.

Задача С4-1

В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и угол $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и BCD.

Решение.

1. Треугольники $\Delta BAD = \Delta BCD$ расположены в разных полуплоскостях относительно прямой BD. Поэтому также по разные стороны от нее расположены и центры O и Q описанных около них окружностей,

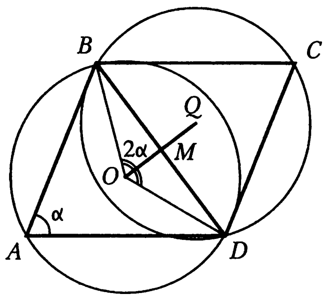
лежащие на серединном перпендикуляре OQ к их общей стороне BD, следовательно,

$$OQ = 2OM,$$

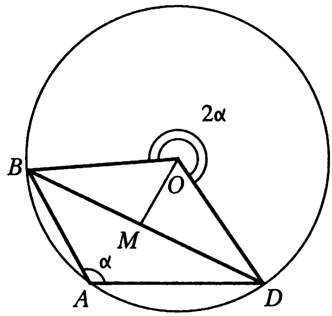
где M — середина BD.

2. Возможны три случая:

а) $\alpha < 90°$, тогда $\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = \alpha$ (теорема о вписанном угле).



б) $\alpha > 90°$, тогда $\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = 180° - \alpha$ (теорема о вписанном угле).



в) $\alpha = 90°$, тогда точки O и M совпадают.

Во всех рассмотренных случаях имеем

$$OM = BM \cdot |\operatorname{ctg}\alpha|.$$

3. Найдем OQ:

а) $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos BAD} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ (теорема косинусов для ΔBAD).

б) $BM = \frac{1}{2}BD$.

в) $OQ = 2OM = 2BM \cdot |\operatorname{ctg}\alpha| = BD \cdot |\operatorname{ctg}\alpha| =$
$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot |\operatorname{ctg}\alpha|$.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot |\operatorname{ctg}\alpha|$.

Комментарий к задаче С4-1.

В задаче требуется найти расстояние между определенными точками в заданной геометрической фигуре.

Задача не очень проста по следующим причинам:

- для вычисления искомого расстояния используются некоторые хотя и стандартные, но не слишком часто употребляемые в задачах факты, такие как местонахождение центра описанной окружности, возможно, соотношение между вписанным и центральным углами, теорема косинусов и, возможно, теорема синусов (для нахождения радиусов окружности);
- условие задачи, ввиду недостаточной определенности данного в ней угла, не совсем однозначно задает расположение центров, между которыми ищется расстояние, — они могут лежать как внутри соответствующих треугольников, так и снаружи, или даже на их границе, от чего могут зависеть рассуждения, необходимые для предложенного решения задачи.

Существует и другое решение той же задачи, отличающееся от приведенного тем, что в нем различные конфигурации аналитически описываются одинаково:

1) расстояние между центрами окружностей вдвое больше, чем расстояние от одного из них до диагонали, относительно которой эти центры симметричны;

2) расстояние до диагонали ищется из прямоугольного треугольника с гипотенузой равной радиусу окружностей и катетом равным половине диагонали — в формуле для расстояния автоматически возникает модуль тангенса.

Приведем текст описанного решения.

Другое решение задачи С4-1.

При любом расположении центров O и Q окружностей в случаях $\alpha < 90°$, $\alpha > 90°$, (см. рисунки выше) или $\alpha = 90°$ имеем

$$OQ = 2OM,$$

где M — середина BD.

Из прямоугольного треугольника OMD находим

$$OM = \sqrt{OD^2 - DM^2}:$$

1) $DM = \frac{BD}{2}$;

2) из теоремы косинусов для треугольника ABD получаем

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha};$$

3) OD — радиус окружности, который находим по теореме синусов, примененной к треугольнику ABD:

$$OD = \frac{BD}{2\sin\alpha}.$$

Значит, имеем

$$OQ = 2OM = 2\cdot\sqrt{\left(\frac{BD}{2\sin\alpha}\right)^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = 2\cdot\frac{BD}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = \\ = BD|\operatorname{ctg}\alpha|.$$

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\cdot|\operatorname{ctg}\alpha|$.

При любом подходе к решению этой задачи от выпускника требуется понимание реализуемости различных геометрических конфигураций и умение вычислять стандартные элементы в заданном треугольнике.

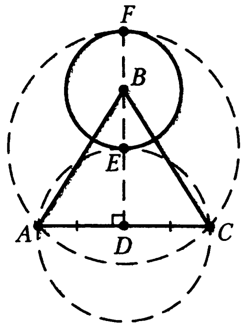
Задача С4-2

Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найти радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Решение.

Пусть D — середина основания AC данного тругольника ABC. Обозначим через E и F точки пересечения прямой BD и окружности с центром в точке B и радиусом 2 (см. рис.). Тогда $AD = 4$, $BD = 3$, $ED = 1$, $FD = 5$.

Искомых окружностей две: они описаны вокруг треугольников AEC и AFC. Их радиусы равны:



$$R_{AEC} = \frac{AE \cdot EC \cdot AC}{4S_{AEC}} = \frac{\left(4^2+1^2\right) \cdot 8}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8} = \frac{17}{2};$$

$$R_{AFC} = \frac{AF \cdot FC \cdot AC}{4S_{AFC}} = \frac{\left(4^2+5^2\right) \cdot 8}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8} = \frac{41}{10}.$$

Ответ: $\frac{17}{2}$; $\frac{41}{10}$.

Комментарий к задаче С4-2.

Здесь требуется найти радиусы двух окружностей, касающихся заданной в задаче окружности. При этом необходимо рассмотреть два случая касания: привычное, внешнее, и непривычное, внутреннее.

- Для вычисления искомых радиусов используются некоторые хотя и стандартные, но не слишком часто употребляемые в задачах факты и формулы.
- Возможны другие решения, в которых: положение центра окружности определяется как точка пересечения серединных перпендикуляров, составляется уравнение относительно искомого радиуса, находятся углы и применяется теорема синусов и др.

При любом подходе к решению этой задачи от выпускника требуется понимание реализуемости различных геометрических конфигураций и умение вычислять стандартные элементы в заданном треугольнике.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и обоснованно получен правильный ответ.
2	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации. Получено хотя бы одно правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, возможно неправильное из-за арифметической ошибки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С4-3

На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Решение.

Центр искомой окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AD с перпендикуляром к прямой BC, проходящим через точку касания. Для точки X касания искомой окружности с прямой BC по теореме о касательной и секущей имеем

$$BX^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3, \text{ откуда } BX = \sqrt{3}.$$

Существуют две возможности.

1) Точка касания лежит на луче BC (рис. 3.). Тогда центр окружности совпадает с серединой O отрезка AD, так как в прямоугольном треугольнике OBE

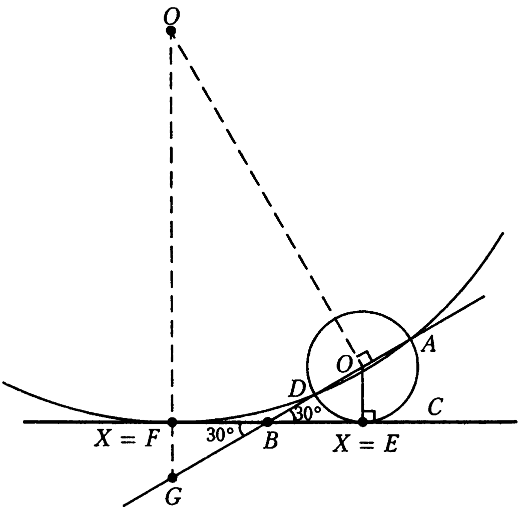
$$\angle OBE = 30°,\ OB = 2,\ BE = \sqrt{3},$$

и точка X совпадает с точкой E.

Искомый радиус окружности равен 1, поскольку

$$OE = OA = OD = 1.$$

2) Точка касания X лежит на продолжении луча BC за точку B. Пусть Q — центр искомой окружности, $F = X$ — основание перпендикуляра, опущенного из Q на прямую BC, а G — точка пересечения прямых QF и AD.



Тогда

$$BF = BX = \sqrt{3},\ \angle GBF = 30°,\ \angle QGO = 60°,$$
$$BG = 2,\ GF = 1,\ OG = 2 + 2 = 4,\ GQ = 8,\ OQ = 4\sqrt{3}.$$

Значит,

$$QF = 8 - 1 = 7,\ QD = QA = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 7,$$

и поэтому искомый радиус окружности равен 7.

Ответ: 1 или 7.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) 1, 7;

Б) радиус окружности равен 7 или 1.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	**Содержание критерия**
3	В представленном решении верно найдены радиусы обеих окружностей.
2	Рассмотрены оба случая расположения окружности, но верно найден радиус только в одном из них.
1	Рассмотрен только один случай расположения окружности и верно найден ее радиус.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С4-4

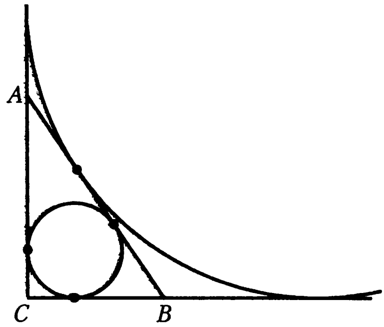
Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

Решение.

Искомых окружностей две (см. рис.):

1) одна вписана в треугольник ABC (пусть ее радиус равен r),

2) вторая является вневписанной для треугольника ABC, т. е. касается гипотенузы AB и продолжений катетов за точки A и B соответственно (пусть ее радиус равен R).



Радиусы этих окружностей равны:

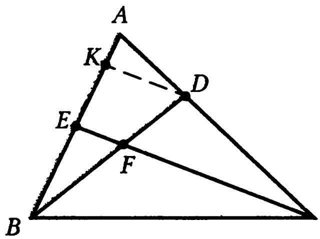
$$r = \frac{S_{ABC}}{\frac{AB+BC+CA}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{\frac{5+3+4}{2}} = 1,$$

$$R = \frac{S_{ABC}}{\frac{BC+CA-AB}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{\frac{5+4-5}{2}} = 6.$$

Ответ: 1 или 6.

Задача С4-5

В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE треугольника ABC пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?



Решение.

Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$ (см. рис.). Если $BK = x$, то

$$KE = 2x \text{ и } EA = EB = 3x.$$

Значит, $S_{AEF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{AKD} = \frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}\cdot S_{ABD} = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{10}S_{ABC}.$

Ответ: 0,1.

Образцы задач С5

Эта задача — с параметром, типичная для вступительного экзамена в вуз с высокими требованиями к математической подготовке абитуриентов.

В вузовской части в целом задача С5 — по всей видимости, одна из самых сложных. Уже на этапе осознания ее постановки от выпускника требуется умение мыслить логически, поскольку здесь ему нужно не решить данное уравнение или неравенство, а выяснить, при каких значениях параметра выполнено некоторое требование, связанное с его решениями.

В подобных задачах нередко бывают особенно уместны:

- навыки использования свойств (таких как монотонность, ограниченность, четность, периодичность и пр.) специально подобранных функций или их графиков;
- способность анализировать логическую суть условия и находить наиболее рациональный путь решения.

Задача С5-1

Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x+1|+2|x+a|>3-2x$$

выполняется для любого x.

Решение.

1. Неравенство преобразуется к виду

$$f(x)>3,$$

где

$$f(x)=|x+1|+2|x+a|+2x=$$

$$=\begin{cases} 5x+1+2a - \text{возрастает при } x \geqslant \max\{-1, -a\}, \\ -x-1-2a - \text{убывает при } x \leqslant \min\{-1, -a\}. \end{cases}$$

2. Функция f совпадает с линейной на каждом интервале, на которые разбивают числовую прямую точки -1 и $-a$, поэтому свое наименьшее значение она принимает в одной из двух точек -1 или $-a$.

3. Все значения функции f больше 3 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(-1)>3, \\ f(-a)>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|-1+a|+2\cdot(-1)>3, \\ |-a+1|+2\cdot(-a)>3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a-1| > \frac{5}{2}, \\ |a-1| > 2a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1 > \frac{5}{2}, \\ a-1 > 2a+3, \end{cases} \\ \begin{cases} a-1 < -\frac{5}{2}, \\ a-1 < -2a-3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{7}{2} < a < -4, \\ \begin{cases} a < -\frac{3}{2}, \\ a < -\frac{2}{3} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow a < -\frac{3}{2}.$$

Ответ: $a < -\frac{3}{2}$.

Комментарий к задаче С5-1.

Эта задача с параметром, в которой нужно не решить данное неравенство, а выяснить, когда оно выполняется при всех значениях неизвестной.

Для приведенного решения задачи оказались полезными следующие действия:

- рассмотреть некоторую функцию и исследовать ее на монотонность, причем без использования производной, поскольку функция — кусочно линейна;
- понять, что наиболее существенную роль для ответа на поставленный вопрос играет именно наименьшее значение функции, которое должно быть попросту больше 3;
- перефразировать требуемое неравенство на наименьшее значение функции так, чтобы не пришлось уточнять, в какой конкретно из двух точек оно принимается;
- решить полученную систему относительно параметра (можно было самыми разными, в том числе и совершенно стандартными способами).

В данном решении задачи график явно не участвовал, но он, конечно же, виделся автору решения «за кадром». Кроме того, при непосредственном, лобовом решении данной задачи вполне могли бы возникнуть непреодолимые технические трудности.

Задача С5-2

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$$

имеет ровно 8 решений.

Решение.

1. Преобразуем уравнение

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - x^2 = (2\pi n)^2, \\ n \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - (2\pi n)^2}, \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

2. Каждому положительному значению подкоренного выражения соответствуют ровно два значения неизвестной, нулевому — одно, а отрицательному — ни одного. Поэтому для того чтобы решений было ровно 8, необходимо и достаточно, чтобы подкоренное выражение было положительным при $n = 0, 1, 2, 3$ и отрицательным при $n = 4, 5, \ldots$

3. Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a^2 - (2\pi \cdot 3)^2 > 0, \\ a^2 - (2\pi \cdot 4)^2 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |a| > 2\pi \cdot 3, \\ |a| > 2\pi \cdot 4. \end{cases}$$

Ответ: $-8\pi < a < -6\pi,\ 6\pi < a < 8\pi$.

Комментарий к задаче С5-2.

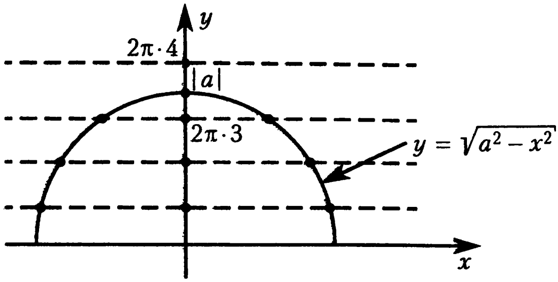
Для решения задачи можно к уравнению

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n$$

применить графическую иллюстрацию. Например, можно нарисовать графики отдельно левой части $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (верхняя полуокружность с центром в начале координат и переменным радиусом $|a|$) и отдельно правой части $y = 2\pi n$ (фиксированные горизонтальные прямые), а затем, указав границы для радиуса полуокружности, обеспечить нужное количество точек их пересечения (см. рис.).

Легко ошибиться, подключив к ответу также и значения $a = \pm 6\pi$, не заметив, что каждое из них при $n = 3$ задает лишь одно значение неизвестной (а не два!).

Если забыть про отрицательные значения неизвестной (задаваемые уравнением наряду с положительными), то количество корней уравнения будет сосчитано неверно, от чего ответ сильно исказится.



Неравенство $a^2 - x^2 \geqslant 0$ не стоит даже упоминать в тексте решения (а тем более — решать!), поскольку оно автоматически вытекает из полученного уравнения $a^2 - x^2 = (2\pi n)^2$.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Ответ обоснован и состоит из верных промежутков, но дополнительно содержит хотя бы один из их концов.
2	Решение опирается на верное рассуждение, в котором только не учтены возможные отрицательные значения неизвестной или имеются другие существенные изъяны. В результате, возможно, получен неверный ответ.
1	Ответ неверен или не получен, но найдено верное выражение для неизвестной или ее квадрата.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С5-3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$9|x - 1| + |3x - |x + a|| - 4x = 0.$$

Непрерывная функция $f(x) = 9|x - 1| + |3x - |x + a|| - 4x$:

1) неограниченно возрастает при $x \geqslant 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \geqslant 9 - 4 - 4 = 1 > 0$;

2) убывает при $x \leqslant 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \geqslant -9 - 4 + 4 = -9 < 0$.

Следовательно, $x = 1$ — точка минимума функции f, а область ее значений есть множество $[f(1); +\infty)$. Поэтому уравнение будет иметь корень тогда и только тогда, когда

$$f(x) \leqslant 0.$$

Решим это неравенство:

$$|3-|1+a|| \leqslant 4;$$
$$-4 \leqslant |a+1| - 3 \leqslant 4;$$
$$|a+1| \leqslant 7;$$
$$-7 \leqslant a + 1 \leqslant 7;$$
$$-8 \leqslant a \leqslant 6.$$

Ответ: $-8 \leqslant a \leqslant 6$.

Комментарий к задаче С5-3.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) $[-8; 6]$;

Б) $a \in [-8; 6]$.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован (например, не указано явно, что функция принимает все значения из множества $[f(1); +\infty)$) или решение содержит ошибки.
2	Верно рассмотрены отдельные случаи расположения , в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или в них допущены ошибки).
1	Верно рассмотрены отдельные случаи, но не найдена никакая часть верного ответа.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

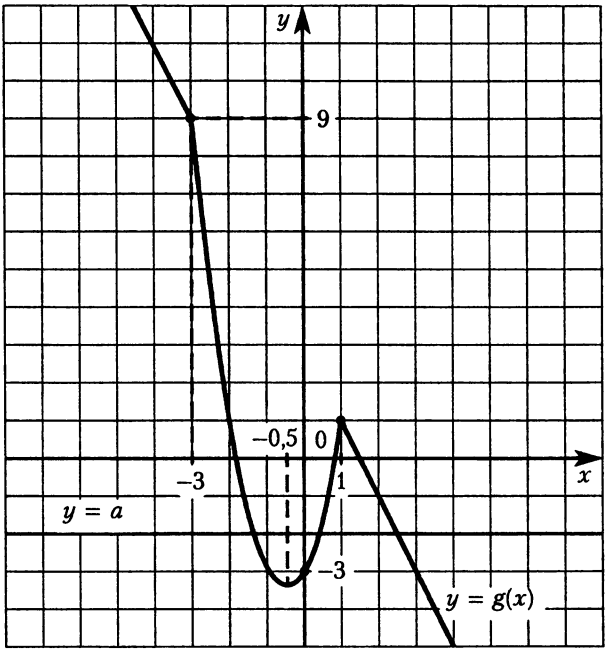
Задача С5-4

Найдите все значения a, при каждом из которых график функции
$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$
пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение.

Рассмотрим вспомогательную функцию
$$g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|.$$

График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.



1) Если $x \leqslant -3$ или $x \geqslant 1$, то
$$|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3 \text{ и } g(x) = -2x + 3.$$

2) Если $-3 < x < 1$, то
$$|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3 \text{ и } g(x) = 2x^2 + 2x - 3.$$

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) < a < g(1),$$

где $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -3{,}5$; $g(1) = 1$.

Ответ: $-3{,}5 < a < 1$.

Образцы задач С6

Задача С6 — относительно сложная, поскольку требует нестандартных путей решения. Однако для ее решения не нужны никакие специальные знания, выходящие за рамки стандарта школьного математического образования.

Задача относится к разряду целочисленных. Она предполагает от выпускника: хорошее понимание свойств делимости чисел, умение производить целенаправленные преобразования выражений для исследования каких-либо специальных свойств, способность логически мыслить, устанавливать взаимосвязи между различными утверждениями.

Задача С6-1

Найдите все пары натуральных чисел разной четности, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}.$$

Решение.

Натуральные числа $m \leqslant n$ разной четности удовлетворяют уравнению тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12} \iff 12m + 12n = mn \iff$$

$$\iff mn - 12m - 12n + 12^2 = 12^2 \iff (m-12)(n-12) = 12^2,$$

причем числа $m - 12$ и $n - 12$ — разной четности.

В качестве возможного разложения

$$12^2 = 2^4 \cdot 3^2 = p \cdot q,$$

где p — нечетно, а q — четно, имеем следующие варианты:

$$1) \begin{cases} p = 1, \\ q = 144 \end{cases} \iff \begin{cases} m - 12 = 1, \\ n - 12 = 144 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 13, \\ n = 156; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} p = 3, \\ q = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 12 = 3, \\ n - 12 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 15, \\ n = 60; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} p = 9, \\ q = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 12 = 9, \\ n - 12 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 21, \\ n = 28; \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} p < 0, \\ q < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 < m - 12 < 0, \\ -12 < n - 12 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m - 12)(n - 12) < 12^2,$$

поэтому требуемое равенство невозможно.

Ответ: (13; 156), (15; 60), (21; 28).

Комментарий к задаче С6-1.

Для нахождения всех пар целочисленных решений требуется:

- свести задачу к конечному перебору, используя самые разные средства: алгебраические преобразования, числовые оценки, свойства делимости и т. д.;
- осуществить перебор так, чтобы он не превратился в изнурительное исследование, для чего бывает полезно:

1) во-первых, удачно выбирать параметр перебора — у нас им оказался нечетный сомножитель p, принимающий всего три положительных значения $p = 1, 3, 9$ (тогда как если бы перебор велся, например, по меньшему сомножителю $m - 12$, то пришлось бы разбирать целых восемь случаев $m - 12 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12$);

2) во-вторых, объединять некоторые случаи в группы однотипных (в нашем решении в одной группе оказались сразу все случаи разложения числа 144 в произведение двух отрицательных сомножителей).

Задача С6-2

Найдите наибольшее натуральное n, для которого число

$$2009! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2009$$

делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Решение.

1. Если $k^2 \leqslant 2009$, то число 2009! делится на k^k, поскольку все числа

$$1 \cdot k,\ 2 \cdot k,\ \ldots,\ (k - 1) \cdot k,\ k \cdot k$$

содержатся в ряду 1, 2, ..., 2009. Поэтому все значения $k = 1, 2, ..., 44$ удовлетворяют требованию задачи, так как $44^2 < 2009$.

2. Если число k — простое и $k^2 > 2009$, то число 2009! не делится на k^k, поскольку последнее из чисел

$$1\cdot k,\ 2\cdot k,\ ...,\ (k-1)\cdot k,\ k\cdot k$$

не содержится в ряду 1, 2, ..., 2009. Поэтому значение $k = 47$ не удовлетворяет требованию задачи, так как $47^2 > 2009$.

2. Пусть $k = 45$. Число 2009! делится на $k^k = 45^{45} = 5^{45}\cdot 9^{45}$, поскольку все числа

$$1\cdot 5,\ 2\cdot 5,\ ...,\ 45\cdot 5 \text{ и } 1\cdot 9,\ 2\cdot 9,\ ...,\ 45\cdot 9$$

содержатся в ряду 1, 2, ..., 2009.

3. Пусть $k = 46$. Число 2009! делится на $k^k = 46^{46} = 2^{46}\cdot 23^{46}$, поскольку все числа

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 2,\ ...,\ 46\cdot 2 \text{ и } 1\cdot 23,\ 2\cdot 23,\ ...,\ 46\cdot 23$$

содержатся в ряду 1, 2, ..., 2009.

Ответ: 46.

Комментарий к задаче С6-2.

Решение задачи разбивается на два принципиальных утверждения, нуждающихся в доказательстве:

- если $n \leqslant 46$, то требование задачи выполнено (при этом для значений оно проверяется с помощью оценки, а для значений $k = 45, 46$ — непосредственно);
- если $n \geqslant 47$, то требование задачи не выполнено (оно опровергается всего одним значением $k = 47$).

Можно легко ошибиться, распространив на составные числа следующий вывод о простом числе k: *если $k^2 > 2009$, то число 2009! не делится на k^k, поскольку последнее из чисел*

$$1\cdot k,\ 2\cdot k,\ ...,\ (k-1)\cdot k,\ k\cdot k$$

не содержится в ряду 1, 2, ..., 2009. Это утверждение формально не проходит для составного числа $k = p\cdot q$ при $p \neq q$, которое заведомо появится в произведении 2009! не только среди перечисленных чисел, но и как, например, произведение чисел p и q из ряда 1, 2, ..., 2009.

Еще одна возможная ошибка связана с проверкой того, что для составных чисел $k = 45, 46$ делимость $2009! \vdots k^k$ имеет место. Можно подумать следующее: *так как существует разложение* $k = p \cdot q$ *на взаимно простые множители, где* $p^2 < 2009$ *и* $q^2 < 2009$, *то число* 2009! *делится на* p^p *и* q^q, *а значит, и на* k^k. Именно последнюю-то делимость при этом как раз утверждать и нельзя (для нее нужно было проверить, что $2009! \vdots p^k$ и $2009! \vdots q^k$).

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Ответ верен, но недостаточно обоснован (например, неаккуратно доказано, что при $k = 45,\ 46$ делимость имеет место).
2	Ответ верен и есть существенное продвижение в решении: например, доказано только, что при $k \leqslant 44$ делимость имеет место, или только, что при $k = 47$ ее нет.
1	Ответ, возможно, неверен, но есть некоторое продвижение в решении: например, верно рассмотрено хотя бы одно значение $k \in \{44, 45, 46, 47\}$.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С6-3

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (т. е. чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

Решение.

Пусть десятичная запись числа b состоит из n цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство

$$\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n}, \text{ поэтому } 10^n(b - a^2) = ab. \qquad (1)$$

Из этого уравнения следует, что $b > a^2 \geqslant a$.

Так как числа a и b взаимно простые, то числа $b - a^2$ и ab тоже взаимно простые. (Действительно, пусть p — общий простой делитель этих чисел. Тогда, если p делитель a, то p будет делителем b. Если же p — делитель b, то p будет делителем a^2, значит p — делитель a. Поэтому p — общий делитель a и b, то есть $p = 1$).

Значит, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} b - a^2 = 1, \\ ab = 10^n, \\ \text{НОД}(a, b) = 1. \end{cases}$$

Поэтому возможны только два случая:

1) $b = 10^n$, $a = 1$, но тогда уравнение $b - a^2 = 1$ принимает вид $10^n = 2$ и не имеет натуральных решений.

2) $b = 5^n$, $a = 2^n$. Для этой пары уравнение $b - a^2 = 1$ принимает вид

$$5^n - 4^n = 1, \text{ откуда } \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Так как функция от n, стоящая в левой части последнего уравнения возрастает, а в правой — убывает, то решение $n = 1$ — единственное.

Ответ: $a = 2$, $b = 5$.

Комментарий к задаче С6-3.

Возможны другие варианты записи ответа. Например:

А) (2; 5);

Б) $\frac{5}{2} = 2{,}5$;

В) $\begin{cases} a = 2, \\ b = 5. \end{cases}$

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Получена система необходимых и достаточных условий на пару искомых чисел и найдено ее решение, но недостаточно обоснована его единственность.
2	Угадан ответ и составлено верное уравнение в натуральных числах, из которого сделаны какие-либо существенные выводы для нахождения искомой пары чисел.
1	Угадан ответ и составлено верное уравнение в натуральных числах.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С6-4

Найдите все натуральные n, для каждого из которых уравнение

$$n^2+2=(2n-1)^x$$

имеет хотя бы один рациональный корень x.

Решение.

1. Пусть $x=\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Так как при любом n

$$(n^2+2)-(2n-1)=(n-1)^2+2>0,$$

то $n^2+2>2n-1\geqslant 1$, поэтому $x>0$ и оба числа p, q можно считать натуральными, причем

$$(n^2+2)^q=(2n-1)^p.$$

Значит, числа $n^2+2>2$ и $2n-1$ имеют одинаковые простые делители.

2. Если d — общий простой делитель чисел n^2+2 и $2n-1$, то d — также и простой делитель числа

$$4(n^2+2)-(2n+1)(2n-1)=9.$$

Поэтому есть только одна возможность: $d=3$ и

$$n^2+2=3^m,\ 2n-1=3^k,$$

причем числа m, k — натуральные и $m>k$.

3. В силу равенства

$$9=4(n^2+2)-(2n+1)(2n-1)=4\cdot 3^m-\left(3^k+2\right)3^k=$$
$$=\left(4\cdot 3^{m-k}-3^k-2\right)3^k,$$

где выражение в последних скобках не кратно 3, получаем

$$\begin{cases}3^k=9,\\ 4\cdot 3^{m-k}-3^k-2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=2,\\ m=3\end{cases}\Rightarrow\quad n=5.$$

При $n=5$ исходное уравнение имеет вид

$$27=9^x$$

и имеет рациональный корень $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: $n=5$.

Комментарий к задаче С6-4.

Предполагаемые критерии проверки решений данной задачи таковы.

Балл	Содержание критерия
4	Обоснованно получен правильный ответ.
3	Ответ найден и доказано, что оба числа и являются степенями числа 3.
2	Ответ найден и доказано, что числа и состоят из одинаковых простых делителей.
1	Ответ найден и проверено, что он удовлетворяет требованию задачи.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача С6-5

Найдите все натуральные n, при которых число

$$n^2 + 5n + 16$$

делится нацело на 169.

Решение.

Если данное число

$$n^2 + 5n + 16 = (n+9)(n-4) + 52$$

делится на $169 = 13^2$, то оно делится и на 13. Поскольку число 52 делится на 13, то и произведение $(n + 9)(n - 4)$ также делится на 13. Поэтому хотя бы один из его сомножителей $n + 9$ или $n - 4$ делится на 13. Так как

$$(n+9) - (n-4) = 13,$$

то сразу оба числа $n + 9$ и $n - 4$ делятся на 13. Следовательно, их произведение делится на 169, а так как 52 не делится на 169, то сумма

$$(n+9)(n-4) + 52$$

также не делится на 169.

Ответ: таких значений n нет.

ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Предлагаемая ниже подборка задач для самостоятельного решения, как нам кажется, способна развить у читателя навыки решения задач, описанные в предыдущих главах и необходимые для успешного выступления на ЕГЭ.

В случае возникновения каких-либо затруднений при решении этих задач советуем сначала обратиться к следующей главе, носящей подготовительный характер.

Подготовка к экзамену — это не только предметно-содержательный тренинг, ориентированный на совершенствование вычислительных (аналитических) навыков, развитие логического мышления и творческих способностей, но и тренировка психофизических возможностей школьника решения задач в условиях экзамена.

В процессе подготовки к экзамену рекомендуем обратить внимание на следующие методические принципы (их неоднократно подчеркивал известный русский геометр и педагог И.Ф. Шарыгин):

- *Регулярность.* Рекомендуем ежедневно выделять время для самостоятельной работы, а не один раз в неделю работать много часов подряд.
- *Параллельность.* Несмотря на привычку изучать математику по темам, при подготовке к экзамену имеет смысл одновременно изучать два-три раздела.
- *Опережающая сложность.* Решать много слишком простых задач, оттачивая технику преобразований и вычислений, как и браться без должной подготовки за решение очень сложных одинаково плохо. Имеет смысл работать на индивидуальном пределе трудности.
- *Смена приоритетов.* В период накопления приемов решения, а также при решении трудных задач главное — правильная идея, которую можно довести до ответа за разумное время. При отработке изученных методов, а также при решении стандартных задач главное — получить правильный ответ.

- *Вариативность.* Полезно на примере одной задачи рассмотреть различные приемы и методы ее решения, а затем сравнить получившиеся решения с разных позиций: трудность вычислительной работы; время на запись решения; степень обоснованности и пр.
- *Самоконтроль.* Регулярный и систематический анализ своих ошибок — обязательный элемент самостоятельной работы. Не стоит обманывать себя, прощая себе, «любимому», ошибки.
- *Повторение.* По мере накопления опыта и числа решенных задач следует просматривать и систематизировать свой задачный архив.
- *Чтение текста.* Привычка решать задачи «по умолчанию» или с короткой формулировкой «решить» вместо вдумчивого прочтения и понимания условия задачи может сыграть злую роль на экзамене.
- *Моделирование возможных ситуаций.* Зная особенности своего поведения в экстремальных ситуациях, например в условиях дефицита времени, имеет смысл искусственно их моделировать — хронометрировать время решения.

Тренировочные задачи для части С

С1

1. Решите систему

$$\begin{cases} 16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0, \\ \sqrt{y} + 2\sin x = 0. \end{cases}$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} \sin x = y - 3, \\ \cos x = y - 2. \end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} 2^{x} = \sin y, \\ 2^{-x} = 2\sin y + 1. \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} 2\sin^2 y + 3\sin y - 2 = 0, \\ \sqrt{x^2 - x} + 4\cos y = 0. \end{cases}$$

5. Решите систему

$$\begin{cases} 3^y + 2\cos x = 0, \\ 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0. \end{cases}$$

6. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 = 8\sin y + 1, \\ x + 1 = 2\sin y. \end{cases}$$

7. Решите систему

$$\begin{cases} \cos y\sqrt{\sin x} = 0, \\ 2\sin^2 x = 2\cos^2 x + 1. \end{cases}$$

8. Решите систему

$$\begin{cases} 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0, \\ \sqrt{y^2 - y - 3} + 2\sin x = 0. \end{cases}$$

9. Решите систему

$$\begin{cases} \cos 2y = \cos y, \\ \sqrt{x^2 - 2x} = 2\sin y. \end{cases}$$

10. Решите систему

$$\begin{cases} x\operatorname{tg} y = 9, \\ x\operatorname{ctg} y = 3. \end{cases}$$

C2

1. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и $A'C$.

2. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

3. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA'B'C'D'$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$ и $AD = \sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD', если расстояние между прямыми AC и $B'D'$ равно 5.

4. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между прямой AA' и плоскостью $BC'D$.

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между прямой AC' и плоскостью BCC'.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

7. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания равны 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и SBC.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB' и BE'.

10. Ребра AD и BC пирамиды $ABCD$ равны 24 и 10. Расстояние между серединами ребер BD и AC равно 13. Найдите угол между прямыми BC и AD.

C3

1. Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{2}x - 1\right) \geqslant -2.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x\left(\log_9\left(3^x - 9\right)\right) < 1.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3).$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1} - 1\right)}{x} \geqslant 1.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{(x^2 - 4)}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)} < 0.$$

7. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1.$$

8. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1.$$

9. Решите неравенство

$$\log_{x+4}(5x+20) \leqslant \log_{x+4}(x+4)^2.$$

10. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x \sqrt{6-x}\right) > 0.$$

C4

1. Точки D и E — основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. Найдите сторону AC, если $\frac{DE}{AC} = k$, $BC = a$, $AB = b$.

2. Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A точка D — середина гипотенузы, а точка C' симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол $AC'B$.

4. Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Найдите угол ACB, если отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

6. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 18$, $CD = 17$ и верхним основанием $BC = 5$ известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

7. На боковых сторонах AB и CD трапеции с основаниями AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, причем $PQ \parallel AD$. Прямая PQ разбивает трапецию на части, площади которых относятся как $1:2$. Найдите PQ, если $AD = a$ и $BC = b$.

8. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен $60°$. В треугольник ABC вписана окружность с центром Q. Найдите угол AQC.

9. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Найдите AC, если $AB = 6$ и $BC = 4$.

10. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

C5

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2\,\big|2|x| - a^2\big| = x - a$$

имеет ровно три различных решения.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = 2\,\big|2|x| - a^2\big| - x + a$$

имеет две различных точки перемены знака.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}$$

лежит в интервале $(-3; 3)$.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств

$$x^2 - 2x \leqslant a - 1 \text{ и } x^2 - 4x \leqslant 1 - 4a$$

образуют на числовой оси отрезок длины единица.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств

$$y + 2x \geqslant a \text{ и } y - x \geqslant 2a$$

являются решениями неравенства

$$2y - x > a + 3.$$

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - a)(ax - 2a - 3) \geqslant 0, \\ ax > 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 + 4x + \left|x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right| - a$$

принимает

1) только неотрицательные значения;

2) как положительные, так и отрицательные значения.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

выполняется:

1) для всех $x > 0$;

2) для всех $x < 0$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|1-x|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

10. Найдите все пары чисел p и q, для каждой из которых неравенство

$$|x^2 + px + q| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

C6

1. Докажите, что при любом натуральном n

$$n^2 + 3n + 5$$

не делится нацело на 121.

2. Найдется ли десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого использованы все цифры от 0 до 9?

3. Найдите все решения в целых числах

$$2^x - 1 = y^2.$$

4. Найдите все решения в натуральных числах

$$x(y+1)^2 = 243y.$$

5. Подряд написаны числа 1, 2, 3, ..., 2010. Каких цифр при записи этих чисел использовано больше — единиц или двоек? На сколько одних цифр больше, чем других?

6. Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

7. При каком наименьшем n число 2010! не делится на n^n?

8. Найдите все пары пятизначных чисел n и m такие, что число $\overline{nm}$, полученное приписыванием десятичной записи числа m после десятичной записи числа n, делится на $n \cdot m$.

9. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается десятичная запись числа, являющегося степенью двойки.

10. Найдите все решения в целых числах уравнения

$$1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2.$$

Ответы к тренировочным задачам

C1

1. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ y = 3\ (n \in \boldsymbol{Z})$.

2. $x = 2\pi n,\ y = 3\ (n \in \boldsymbol{Z});\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ y = 2,\ (m \in \boldsymbol{Z})$.

3. $x = -1,\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\ (n \in \boldsymbol{Z})$.

4. $x = -3,\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\ (n \in \boldsymbol{Z});\quad x = 4,\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m\ (m \in \boldsymbol{Z})$.

5. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ y = \frac{1}{2}\ (n \in \boldsymbol{Z})$.

6. $x = -1,\ y = n\pi\ (n \in \boldsymbol{Z})$.

7. $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi,\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k\ (n, k \in \boldsymbol{Z})$.

8. $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, y = 3\ (n \in \boldsymbol{Z});\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ y = -2\ (m \in \boldsymbol{Z})$.

9. $x = 0,\ y = 2\pi n\ (n \in \boldsymbol{Z});\quad x = 2,\ y = 2m\pi\ (m \in \boldsymbol{Z})$;
$x = 3,\ y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \boldsymbol{Z});\quad x = -1,\ y = \frac{2\pi}{3} + 2pl\ (l \in \boldsymbol{Z})$.

10. $x = 3\sqrt{3},\ y = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ (n \in \boldsymbol{Z});\quad x = -3\sqrt{3},\ y = -\frac{\pi}{3} + m\pi$ $(m \in \boldsymbol{Z})$.

C2

1. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
2. 2 или 14;
3. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
7. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
8. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
9. 90°;
10. 90°.

C3

1. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.
2. $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup [2; +\infty)$.
3. $(\log_3 10; +\infty)$.
4. $\left(-\sqrt{5}; -2\right) \cup \left(1; \sqrt{5}\right)$.
5. $\left(\log_2\left(\frac{2}{3}\right); 0\right) \cup [1; +\infty)$.
6. $(-\infty; -2) \cup \left(-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
7. $\left(0; 10^{\frac{\lg 0,5 \cdot \lg 3}{\lg 1,5}}\right)$ или $\left(0; \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{3/2} 3}\right)$.
8. $\left(-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right)$.
9. $(-4; -3) \cup [1; +\infty)$.
10. $(2; 5)$.

C4

1. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2abk}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + 2abk}$;
2. 21 и 9.

3. $90° + \alpha$ ($\alpha < 45°$); $90° - \alpha$ ($\alpha > 45°$). При $\alpha = 45°$ точка C' совпадает с A и угол не определен.

4. $30°$, $150°$.

5. $60°$, $120°$.

6. 18, $4\sqrt{19}$.

7. $\sqrt{\dfrac{2a^2+b^2}{3}}$, $\sqrt{\dfrac{a^2+2b^2}{3}}$.

8. $165°$, $105°$.

9. $\sqrt{35}+\sqrt{15}$; $\sqrt{35}-\sqrt{15}$.

10. 9 и 39.

C5

1. $a = -\frac{1}{2}$ и $a = -2$.

2. $a \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

3. $-5 < a < 1$.

4. $a = \frac{1}{4}$ и $a = 1$.

5. $a > \frac{9}{8}$.

6. $-2 \leqslant a \leqslant 0$.

7. 1) $a \leqslant -\frac{57}{32}$; 2) $a > -\frac{57}{32}$.

8. 1) $a > 1$; 2) $a \geqslant 0$.

9. $a = -\frac{1}{32}$; $a = -\frac{1}{4}$.

10. $p = -6$, $q = 7$.

C6

2. Да, таких чисел много. Например: 9576843210

3. $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = -1$; $x = 1$, $y = 1$.

4. $x = 24$, $y = 8$; $x = 54$, $y = 2$.

5. Единиц на 901 больше, чем двоек.

6. 6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210.

7. 47.

8. 16667 и 33334.

9. 32 и 64.

10. $k = 0$, $n = \pm 2$; $k = 4$, $n = \pm 23$.

ГЛАВА 4. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Ниже предлагаются задачи, призванные помочь школьникам ликвидировать пробелы в своих знаниях школьного курса математики и устранить недостатки подготовки к стандартным экзаменационным задачам.

Рассуждения и выкладки, применяемые при решении этих задач, сравнительно просты, но они совершенно необходимы для достижения успеха на экзамене, так как из них, как из «кирпичиков», обычно состоят решения более сложных задач.

Решение этих задач не только поможет Вам при подготовке экзамену, но и будет способствовать развитию математических навыков, полезных для дальнейшего изучения математики в высшем учебном заведении.

Учебные задачи для части C

C1

Решите систему:

1. $\begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0, \\ 6\sin x + 5y = 13. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2\cos^2 x + 11\cos x + 5 = 0, \\ 5\cos x - 2\cos y + 4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2\operatorname{tg} x + 5y = 12, \\ 2\operatorname{tg} x + 3y = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 3\operatorname{tg} x + 8\cos y = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ \cos x = \sin y, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2}\cos y = x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0, \\ 6\cos x + 5y = 13. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2\operatorname{ctg} y + 5x = 12, \\ 2\operatorname{ctg} y + 3x = 8. \end{cases}$

C2

1. Доказать, что три попарно пересекающиеся прямые в пространстве, не проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости.

2. В пространстве заданы четыре точки. Сколько может быть различных плоскостей, содержащих не менее трех из заданных точек?

3. Пусть A, B, C, D — точки, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что:

а) прямая AB параллельна плоскости, проходящей через середины AD, BD, CD;

б) плоскость проходящая через середины AD, BD, CD, параллельна плоскости ABC.

4. Пусть A — точка, не лежащая в плоскости П, M — произвольная точка плоскости П. Найдите геометрическое место середин отрезков AM.

5. Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат в двух параллельных плоскостях.

6. Пусть $ABCD$ — прямоугольник и точка E не лежит в его плоскости. Найдите угол между прямыми, по которым пересекаются пары плоскостей: ABE, CDE и BCE, ADE.

7. В пирамиде $ABCD$ угол $\angle ABC = \beta$. Найдите угол между прямыми, проходящими через пары точек: середины AC, BC и середины BD, CD.

8. Расстояния от концов отрезка до плоскости равны 1 и 3. Чему равно расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости?

9. Точка A находится на расстоянии a от плоскости П и на расстоянии b от прямой L, лежащей в плоскости П, A' — проекция A на плоскость П. Найдите расстояние от A' до прямой L.

10. Какие углы образует диагональ куба с его гранями?

11. В пирамиде $ABCD$ $AB = BC = CA = a$, $AD = BD = CD = b$. Найдите углы, образованные прямыми AD, BD, CD с плоскостью ABC.

12. В одной из граней двугранного угла величины α взята точка A на расстоянии d от ребра двугранного угла. Найдите расстояние от A до плоскости второй грани.

13. Пусть A' — проекция точки A на плоскость П, $AA' = a$. Через точку A проходит плоскость, образующая с плоскостью П угол α и пересекающая плоскость П по прямой L. Найдите расстояние от A' до прямой L.

14. Найдите сумму углов, которые произвольная прямая образует с плоскостью и прямой, перпендикулярной этой плоскости.

15. В пирамиде $ABCD$ угол $\angle ABC = \alpha$, проекция точки D на плоскость ABC есть точка B. Найдите величину угла между плоскостями ABD и BCD.

16. Докажите, что площадь проекции многоугольника, расположенного в плоскости П на плоскость П$'$ равна $S\cos\varphi$, где S — площадь многоугольника, φ — угол между плоскостями.

17. Три прямые проходят через точку A. Точки B, B' — точки одной прямой, C, C' — точки другой прямой, D, D' — точки третьей прямой. Докажите, что отношение объемов пирамид $ABCD$ и $AB'C'D'$ равно $\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB' \cdot AC' \cdot AD'}$.

18. Пусть S и P — площади двух граней тетраэдра, a — длина их общего ребра, α — двугранный угол между ними. Докажите, что объем тетраэдра равен $\frac{2SP\sin\alpha}{3a}$.

19. Докажите, что объем тетраэдра равен $\frac{abd\sin\alpha}{6}$, где a и b — длины противоположных ребер тетраэдра, d — расстояние, а α — угол между этими ребрами.

20. Докажите, что плоскость, делящая пополам двугранный угол при каком-либо ребре тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

С3

Решить:

1. $2^{x-5} = \frac{1}{2^{-2x+3}}$.

2. $(0{,}25)^{x+1} = (0{,}125)^{x-3}$.

3. $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$.

4. $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$.

5. $4^{\frac{1}{x}-2} = \frac{\lg\sqrt{10}}{2}$.

6. $4^x - 10\cdot 2^{x-1} = 24$.

7. $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$.

8. $4^{\frac{2}{x}} - 5\cdot 4^{\frac{1}{x}} = 24$.

9. $4\cdot 2^{2x} - 6^x = 18\cdot 3^{2x}$.

10. $2^{x+1}\cdot 5^x = 200$.

11. $2^{3-6x} > 1$.

12. $16^{-x} > 0{,}125$.

13. $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} \leqslant (0{,}1)^{2x-3}$.

14. $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$.

15. $\dfrac{2^{x-1} - 1}{2^{x+1} + 1} < 2$.

16. $2^{x+2} - 2^{x+1} - 2^{x-1} - 2^{x-2} + 2^x \leqslant 9$.

17. $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

18. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

19. $\log_3 (x - 1) = 2$.

20. $\log_{(x-1)} 3 = 2$.

21. $\log_3 x^2 = 2$.

22. $\log_{x^2} 1 = 0$.

23. $\log_5 (x^2 - 3) = \log_5 2x$.

24. $2 \cdot \log_4 (x^2 - 1) = 3 \cdot \log_8 (3 - 3x)$.

25. $\log_7 (x + 1) + \log_7 (x + 7) = 1$.

26. $\log_7 (x - 1) + \log_7 (x - 7) = 1$.

27. $3^{\log_3 (x^2)} = 81$.

28. $x^{\log_3 x} = 81$.

29. $x^{\lg x} = 1000 \cdot x^2$.

30. $x^{\lg 7} + 7^{\lg x} = 98$.

31. $\log_2 (5x - 1) < 1$.

32. $\log_{0,5} (2x + 1) > -1$.

33. $\dfrac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64$.

34. $\dfrac{(0,2)^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{(0,04)^x}{25}$.

C4

1.Найти геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух точек этой плоскости.

2. Найти геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух прямых этой плоскости.

3. Пусть A и B — точки плоскости П и число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Найти геометрическое место точек M плоскости П, для которых $\angle AMB = \alpha$.

4. Длины сторон треугольника равны 10, 24 и 26. Найти углы треугольника.

5. Существует ли треугольник с углами: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Длины двух сторон треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен $\frac{\pi}{6}$. Найти длину третьей стороны и величины двух других углов.

7. Длины двух сторон треугольника равны 1 и 2, а синус угла между ними равен $\frac{1}{2}$. Найти длину третьей стороны и величины двух других углов.

8. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 5, а длина высоты BD равна 3 . Найти угол $\angle BAC$.

9. Найти площадь треугольника со сторонами:

а) 5, 9, 12;

б) 1, 2, 5;

в) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$.

10. Найти углы треугольника, длины двух сторон которого равны 3 и 4, если его площадь равна 3.

11. Длины сторон треугольника равны a, b и c. Найти длину медианы (биссектрисы), проведенной к стороне c.

12. В треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 4$, $CA = 6$. Найти: площадь треугольника, радиус вписанной и радиус описанной окружности, высоту, медиану и биссектрису, проведенные из вершины B.

13. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:
а) треугольник правильный;
б) медианы равны;
в) высоты равны.

14. Зная длины медиан треугольника, найти его площадь.

15. Зная длины высот треугольника, найти его площадь.

16. Всегда ли из медиан треугольника можно сложить треугольник?

17. Всегда ли из высот треугольника можно сложить треугольник?

18. Длины сторон треугольника равны a, b, c. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису, проведенную к стороне a?

19. Величины углов треугольника равны α, β, γ. В каком отношении точка пересечения высот делит высоту, проведенную из вершины угла α?

20. Длина отрезка, соединяющего основания высот, проведенных к стонам AB и AC остроугольного ABC треугольника равна l, а величина угла $\angle BAC$ равна α. Найти длину BC.

21. Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Доказать, что величина угла измеряется полуразностью дуг, высекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла.

22. Пусть вершина угла находится внутри круга. Доказать, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла.

23. Доказать, что угол между касательной к окружности и хордой этой окружности, проходящей через точку касания измеряется половиной дуги, заключенной между касательной и хордой.

24. Хорды AB и CD окружности с центром в точке O радиуса R пересекаются в точке в точке E. Доказать, что

$$AE \cdot BE = CD \cdot DE = R^2 - OE^2.$$

25. Секущие окружности с центром в точке O радиуса R, проходящие через точку A, пересекают окружность в точках B, C и D, E соответственно. Доказать, что

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AO^2 - R^2.$$

26. Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O радиуса R, проведена секущая и касательная. Секущая пересекает окружность в точках B и C (B лежит между A и C), а касательная касается окружности в точке D. Доказать, что

$$AD^2 = AB \cdot AC = AO^2 - R^2.$$

27. Пусть AD — биссектриса внутреннего угла треугольника ABC. Доказать, что

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$

То же верно для биссектрисы внешнего угла треугольника ABC (в этом случае точка D лежит на продолжении BC).

28. Длины двух сторон параллелограмма равны a и b, а длина одной из диагоналей равна d. Найти длину второй диагонали.

29. В равнобедренной трапеции длина боковой стороны равна 5, основание высоты, проведенной из вершины верхнего основания, делит нижнее основание на отрезки с длинами 12 и 3. Найти длину верхнего основания, площадь трапеции, длину высоты и длину диагонали.

30. Доказать, что в выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда

$$AB + CD = AD + BC.$$

C5

Для каждого значения a решить относительно x:

1. $a \cdot x = 1$.

2. $a \cdot x < 1$.

3. $(a^2 - 1)x = a - 1$.

4. $\dfrac{x-a}{x-2} = 0$.

5. $\dfrac{x-a}{a+2} = 0$.

6. $\dfrac{x-5}{x^2-a^2} = 0$.

7. $\dfrac{a(x-a)}{x-2} = 0$.

8. $x^2 = a$.

9. $x^2 > a$.

10. $x^2 \leqslant a$.

11. $x^3 = a$.

12. $x^3 > a$.

13. $x^3 \leqslant a$.

14. $|x| = a$.

15. $|a| = x$.

16. $|x-3| < a$.

17. $|x-3| > a$.

18. $\sqrt{x} = -a$.

19. $a\sqrt{x} = 0$.

20. $\sqrt{x} > a$.

21. $\sqrt{x} \leqslant a$.

22. $2^x < a$.

23. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < a$.

24. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant a$.

25. $2^x \geqslant a$.

26. $\log_a x < 1$.

27. $\log_x a < 1$.

28. $\sin x = a$.

29. $\sin x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$.

C6

1. Пусть p простое и $p > 3$. Доказать, что $p^2 - 1$ делится нацело на 24.

2. Пусть p и q простые и $p > q > 3$. Доказать, что $p^2 - q^2$ делится нацело на 24.

3. Доказать, что число $2^{10} + 5^{12}$ — составное.

4. Доказать, что число $222^{333} + 333^{222}$ — составное.

5. Доказать, что если сумма десятичных цифр числа n равна сумме десятичных цифр числа $2n$, то n делится на 9. Привести пример того, что обратное утверждение неверно.

6. Найти десятичную цифру x числа $\overline{5x793x4}$, если известно, что это число делится на 9.

7. Найти все числа вида $\overline{34x5y}$, такие, что делится на 36.

8. Доказать, что $2010^{2010} - 1$ делится на 2009 .

9. Доказать, что для любого натурального n число $n^2 + n$ — четное.

10. Доказать, что для любого целого n число $n^3 + 2n$ делится на 3.

11. Доказать, что для любого целого n число $n^3 + 5n$ делится на 6.

12. Доказать, что для любого целого n число $n^5 - n$ делится на 30.

13. Доказать, что в последовательности:

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \ldots$$

нет числа, которое является квадратом натурального.

14. Найти НОД(54, 72) и НОК(54, 72).

15. Доказать, что при любом натуральном n числа $21n + 1$ и $14n + 3$ — взаимно простые.

16. Доказать, что для любого натурального n наибольший общий делитель чисел $n^2 + 10n + 21$ и $n^2 + 9n + 18$ равен $n + 3$.

17. Доказать, что для любого натурального n наименьшее общее кратное чисел $n^2 + 6n + 9$ и $n + 4$ равно $n^3 + 10n^2 + 33n + 36$.

18. Доказать, что ни при каком целом n число $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169.

19. Доказать, что все числа вида

$$16,\ 1156,\ 111556,\ 11115556,\ \dots$$

являются полными квадратами.

20. Записать число 0,11(7) в виде обыкновенной дроби.

21. Доказать, что числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональные.

22. Доказать, что число $\log_2 3$ — иррациональное.

23. Доказать, что число $\log_4 6$ — иррациональное.

24. Решить уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.

25. Доказать, что уравнение $x^2 + 1 = 3y$ не имеет решений в целых числах.

26. Решить уравнение $xy + x - y = 2$ в целых числах.

27. Найти рациональные p и q, если один из корней уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

равен $1 + \sqrt{3}$.

28. Доказать, что при любом натуральном n дробь $\frac{3n+5}{5n+8}$ несократима.

29. Доказать, что

$$\sqrt{N} = \begin{cases} n, \text{ если } N = n^2,\ n \in \boldsymbol{N}, \\ \text{иррациональное, если } N \neq n^2,\ n \in \boldsymbol{N}. \end{cases}$$

30. Доказать, что если

$$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n},$$

где числа $2 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные, то число различных натуральных делителей числа N равно:

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_n + 1).$$

Ответы и указания к учебным задачам

С1

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ y = 2,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ y = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k,\ n, k \in \boldsymbol{Z}$.

3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ y = 2,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n, k \in \boldsymbol{Z}$.

5. $x = 2,\ y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

6. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right), \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

7. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ y = \frac{\pi}{6} - k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

8. $x = 2,\ y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

9. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ y = 2,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

10. $x = 2,\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

С2

1. Проведите плоскость через точки пересечения этих прямых.

2. Одна, четыре, бесконечно много.

3. Середины указанных ребер образуют треугольник, подобный ΔABC, со сторонами, параллельными сторонам ΔABC.

4. Плоскость, параллельная П, проходящая через середину одного из отрезков AM.

5. Плоскость, параллельная данным, проходящая через середину одного из указанных отрезков.

6. $90°$.

7. β или $\pi - \beta$.

8. 2 или 1.

9. $\sqrt{b^2 - a^2}$.

10. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. $\arccos\frac{a}{b\sqrt{3}}$.

12. $d\sin\alpha$.

13. $a\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha$.

14. $90°$.

15. α.

С3

1. $x = -2$.
2. $x = 11$.
3. $x = \frac{2}{7}$.
4. $x = 2 - \sqrt{\frac{7}{2}}$, $x = 2 + \sqrt{\frac{7}{2}}$.
5. $x = 1$.
6. $x = 3$.
7. $x = 2$.
8. $x = \frac{2}{3}$.
9. $x = -2$.
10. $x = 2$.
11. $x < \frac{1}{2}$.
12. $x < \frac{3}{4}$.
13. $x \in \boldsymbol{R}$.
14. $0 < x < 1$.
15. $x \in \boldsymbol{R}$.
16. $x \leqslant 2$.
17. $x > 0$.
18. $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$.
19. $x = 10$.
20. $x = 1 + \sqrt{3}$.
21. $x = -3$, $x = 3$.
22. $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$.
23. $x = 3$.

24. $x = -4$.
25. $x = 0$.
26. $x = 8$.
27. $x = -9$, $x = 9$.
28. $x = \frac{1}{9}$, $x = 9$.
29. $x = \frac{1}{10}$, $x = 1000$.
30. $x = 100$.
31. $\frac{1}{5} < x < \frac{3}{5}$.
32. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.
33. $x = 2$.
34. $x = -1$.

С4

1. Если A и B — заданные точки, то: $A = B$, вся плоскость; $A \neq B$, «серединный перпендикуляр» к отрезку AB, т. е. прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярная AB и проходящая через середину AB.

2. Если L_1 и L_2 — заданные прямые, то: $L_1 = L_2$ — вся плоскость; $L_1 \parallel L_2$ — прямая, параллельная L_1 (L_2), лежащая посередине между L_1 и L_2; L_1 и L_2 имеют единственную общую точку — биссектрисы двух вертикальных углов, образованных L_1 и L_2.

3. а) $A = B$, $\alpha = 0$ — вся плоскость П;

б) $A = B$, $\alpha \neq 0$ — таких точек нет;

в) $A \neq B$, $\alpha = 0$ — прямая AB без отрезка $[AB]$;

г) $A \neq B$, $\alpha = \pi$ — интервал AB;

д) $A \neq B$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ — две большие дуги (без точек A и B) окружностей, симметричных относительно прямой AB, из центра этих окружностей отрезок AB виден под углом 2α;

е) $A \neq B$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — две дуги (без точек A и B) окружности с диаметром AB;

ж) $A \neq B$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ — две меньшие дуги (без точек A и B) окружностей, симметричных относительно прямой AB, из центра этих окружностей отрезок AB виден под углом $2\pi - 2\alpha$.

4. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{5}{13}$, $\arcsin\frac{12}{13}$.

5. нет, т. к. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} > \pi$.

6. $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$.

7. $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$,

$\sqrt{5+2\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

8. Таких треугольников много, но у всех треугольников $\angle BAC$ или $\arcsin\frac{3}{5}$, или $\pi - \arcsin\frac{3}{5}$.

9. а) $4\sqrt{26}$;

б) такого треугольника нет;

в) $\frac{7}{2}$.

10. $\frac{\pi}{6}$; $\arcsin\frac{2}{\sqrt{25-6\sqrt{3}}}$; $\arcsin\frac{3}{2\sqrt{25-6\sqrt{3}}}$;

$\frac{5\pi}{6}$; $\arcsin\frac{2}{\sqrt{25+6\sqrt{3}}}$; $\arcsin\frac{3}{2\sqrt{25+6\sqrt{3}}}$.

11. $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, $l_c = \sqrt{ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}$.

12. $3\sqrt{15}$, $\frac{\sqrt{15}}{3}$, $\frac{16\sqrt{15}}{15}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{31}$, $2\sqrt{6}$.

14. Пусть m_a, m_b, m_c — длины медиан, тогда $S_\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$, где $m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$.

15. $\frac{1}{\sqrt{\left(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}\right)\left(-h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}\right)\left(h_a^{-1} - h_b^{-1} + h_c^{-1}\right)\left(h_a^{-1} + h_b^{-1} - h_c^{-1}\right)}}$.

16. Всегда.

17. Нет, не всегда.

18. $\frac{b+c}{a}$.

19. $\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

20. $\dfrac{l}{|\cos\alpha|}$ при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$, при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ определить невозможно.

28. Если $d \leqslant a - b$ или $d \geqslant a + b$, то такого параллелограмма нет; если $a - b < d < a + b$, то $D^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

29. 9, 48, 4 и $4\sqrt{10}$.

C5

1. $a = 0$, $x \in \varnothing$; $a \neq 0$, $x = \dfrac{1}{a}$.
2. $a = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$; $a > 0$, $x < \dfrac{1}{a}$; $a < 0$, $x > \dfrac{1}{a}$.
3. $a = 1$, $x \in \boldsymbol{R}$; $a = -1$, $x \in \varnothing$; $a \neq -1$ и $a \neq 1$, $x = \dfrac{1}{a+1}$.
4. $a = 2$, $x \in \varnothing$; $a \neq 2$, $x = a$.
5. При $a = -2$ выражение не определено. $a \neq -2$, $x = a$.
6. $a = -5$, $x \in \varnothing$; $a = 5$, $x \in \varnothing$; $a \neq -5$ и $a \neq 5$, $x = 5$.
7. $a = 0$, $x \neq 2$; $a = 2$, $x \in \varnothing$; $a \neq 0$ и $a \neq 2$, $x = a$.
8. $a < 0$, $x \in \varnothing$; $a > 0$, $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$; $a = 0$, $x = 0$.
9. $a < 0$, $x \in \boldsymbol{R}$; $a = 0$, $x \neq 0$; $a > 0$, $a > \sqrt{a}$ и $x < -\sqrt{a}$.
10. $a < 0$, $x \in \varnothing$; $a = 0$, $x = 0$; $a > 0$, $-\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}$.
11. При любом a $x = \sqrt[3]{a}$.
12. При любом a $x > \sqrt[3]{a}$.
13. При любом a $x \leqslant \sqrt[3]{a}$.
14. $a < 0$, $x \in \varnothing$; $a > 0$, $x = -a$ и $x = a$; $a = 0$, $x = 0$.
15. При любом a $x = |a|$.
16. $a \leqslant 0$, $x \in \varnothing$; $a > 0$, $-a + 3 < x < a + 3$.
17. $a < 0$, $x \in \boldsymbol{R}$; $a = 0$, $x \neq 3$; $a > 0$, $\left[\begin{array}{l} x > a + 3, \\ x < -a + 3. \end{array}\right.$
18. $a > 0$, $x \in \varnothing$; $a \leqslant 0$, $x = a^2$.
19. $a = 0$, $x \geqslant 0$; $a \neq 0$, $x = 0$.
20. $a < 0$, $x \geqslant 0$; $a \geqslant 0$, $x > a^2$.
21. $a < 0$, $x \in \varnothing$;$a \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant a^2$.
22. $a \leqslant 0$, $x \in \varnothing$; $a > 0$, $x < \log_2 a$.
23. $a \leqslant 0$, $x \in \varnothing$; $a > 0$, $x > -\log_2 a$.
24. $a \leqslant 0$, $x \in \boldsymbol{R}$; $a > 0$, $x \leqslant -\log_2 a$.

25. $a \leqslant 0$, $x \in \boldsymbol{R}$; $a > 0$, $x \geqslant \log_2 a$.

26. $a \leqslant 0$ или $a = 1$ — выражение не определено;
$a > 1$, $0 < x < a$; $0 < a < 1$, $x > a$.

27. $a \leqslant 0$ — выражение не определено; $a = 1$, $0 < x < 1$ и $x > 1$;
$0 < a < 1$, $0 < x < a$ и $x > 1$; $a > 1$, $0 < x < 1$ и $x > a$.

28. $|a| > 1$, $x \in \varnothing$; $|a| < 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
$a = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $a = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

29. $a = 0$ — выражение не определено; $a = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
$a = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a \neq 1$, $x \in \varnothing$.

С6

1. $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ оба множителя четные и один из них делится на 3.

2. $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$.

3. $2^{10} + 5^{12} = \left(2^5 + 5^6\right)^2 - 2^6 \cdot 5^6$.

4. $222^{333} + 333^{222} = \left(222^{111}\right)^3 + \left(333^{74}\right)^3$.

5. Пример: $n = 333$.

6. 4.

7. 34452, 34056, 34956.

8. $1 + 2010 + 2010^2 + \ldots + 2010^{2009} = \frac{2010^{2010} - 1}{2010 - 1}$.

9. $n^2 + n = n(n+1)$ — один из множителей четный.

10. $n^3 + 2n = (n^3 - n) + 3n = (n-1)n(n+1) + 3n$ или рассмотреть остатки от деления числа n на 3: $n = 3k + r$, $r = 0, 1, 2$ ($r = -1, 0, 1$).

11. Рассмотреть остатки от деления числа n на 6: $n = 6k + r$, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Или $n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n$.

12. $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$.

13. Каждое число, начиная с третьего, имеет вид: $n = 100k + 11 = 4(25k + 2) + 3$.

14. 18, 216.

15. Если d — общий натуральный делитель, то $\begin{cases} 21n+1 = dN, \\ 14n+3 = dM, \\ N, M \in \mathbf{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad 1 = d(3M - 2N)$.

16. $n^2 + 10n + 21 = (n+3)(n+7)$, $n^2 + 9n + 18 = (n+3)(n+6)$, $n+6$ и $n+7$ — взаимно простые.

17. $n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2$, $n+3$ и $n+4$ — взаимно простые.

18. $n^2 + 5n + 16 = (n+9)(n-4) + 52$, $(n+9) - (n-4) = 13$.

19. $\overbrace{111...1}^{n}\overbrace{555...5}^{n-1}6 = (\overbrace{333...3}^{n-1}4)^2$.

20. $\frac{53}{450}$.

24. $x = 4n + 3$, $y = 3n + 2$, $n \in \mathbf{Z}$.

25. Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.

26. $(x-1)(y+1) = 1$. $x = 2$; $y = 0$; $x = 0$; $y = -2$.

27. $p = q = -2$.

28. См. комментарий к 15.